HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 8 (15.11.2012)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Olkoon satunnaismuuttujen jonot $(X_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ ja $(Y_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ tasaisesti integroituvia. Osoita että jono $(X_n + Y_n : n \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva.

   Vihje: käytä tasaisen integroituvuuden karakterisaatio (Lause 7.0.1) $\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva jos ja vain jos

   $$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X|) < \infty \quad \text{ja} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta : P(A) < \delta \implies \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P\big(|X| \mathbf{1}_A\big) < \varepsilon$$

   ja välikokeen vihje $\forall K > 0$,

   $$\big\{\omega : |X_n(\omega) + Y_n(\omega)| > K\big\} \subseteq \big\{\omega : |X_n(\omega)| + |Y_n(\omega)| > K\big\}$$
   $$\subseteq \big\{\omega : |X_n(\omega)| > K/2\big\} \bigcup \big\{\omega : |Y_n(\omega)| > K/2\big\},$$

2. (a) Osoita seuraava Chebychevin epäyhtälön variaatio: $\forall p > 1$

   $$E_P\big(|X| \mathbf{1}(|X| > K)\big) \le E_P(|X|^p) K^{1-p}$$

   (b) Olkoon $(X_n : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono jolla

   $$\sup_n E_P\big(|X_n|^p\big) < \infty$$

   jollekin $p > 1$.
   Osoita että $(X_n : n \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva.

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon

   $$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots X_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$$

   satunnaisvektori, ja olkoon $P_X(dt)$ sen todennäköisyysjakauma $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ avaruudessa:

   $$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P\big(\big\{\omega : X(\omega) \in B\big\}\big), \qquad \text{kun } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

   Satunnaismuuttujat $X_1(\omega), \dots, X_d(\omega)$ ovat rippumattomia P-mitan suhteen jos ja vain jos vektorin todennäköisyysjakauma on koordinattien jakaumien tulo:

   $$P_X = (P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_d})$$

   Vihje Määrittele sopivasti testi-funktioita.

4. Olkoon N Poisson jakautunut parametrilla $\lambda > 0$, eli

$$P_\lambda(N = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

(a) Laske momentti generoiva funktio

$$\phi_\lambda(t) = E_\lambda(\exp(tN))$$

(b) Laske $E_\lambda(N)$, $E_\lambda(N^2)$.

5. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla on

$$P(G \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

ja momentti generoiva funktio

$$\phi(t) = E_P\big(\exp(tG)\big) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Olkoon myös $N(\omega)$ Poisson jakautunut parametrilla $\lambda = 1$:

$$P(N = k) = \exp(-1)\frac{1}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(a) Osoita

$$E_P(\exp(tG)) = \exp(1) E_P\left(\big(t^2/2\big)^N\right)$$

(b) Olkoon

$$X(t, \omega) = \left(\frac{t^2}{2}\right)^{N(\omega)}$$

Sen m-kertainen derivaatta on

$$X^{(m)}(t, \omega) =$$
$$\begin{cases} 2^{-N} \frac{d^m}{dt^m}\left(t^{2N(\omega)}\right) = 2N(2N-1)\dots(2N-m+1)t^{2N-m}2^{-N}, & m \leq 2N \\ 0 & m > 2N \end{cases}$$

Osoita että $X^{(m)}(t, \omega) \in L^1(P)\ \forall t$.

(c) Osoita että löytyy väli $(a,b) \ni t$, jolla

$$\{\ X^{(m)}(s,\omega) : s \in (a,b)\} \text{ on tasaisesti integroituva }.$$

Vihje esitä integroituva yläraja.

(d) Osoita

$$\frac{d^m}{dt^m} E_P\big(\exp(tG)\big) = \frac{d^m}{dt^m} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{d^m}{dt^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} =$$
$$\exp(1) \frac{d^m}{dt^m} E_P\left(\big(t^2/2\big)^N\right) = \exp(1) E_P\left(\frac{d^m}{dt^m}\left\{\left(\frac{t^2}{2}\right)^N\right\}\right) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^m}{dt^m} \frac{t^{2k}}{2^k k!}$$

perustelemalla derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihtoa.

(e) Osoita

$$E_P(G^{2n}) = \frac{(2n)!}{n! 2^n}, \quad E_P(G^{2n+1}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vihje Laske Gaussisen momentti generoiva funktion $2n$-kertainen derivaatta pisteessä $t=0$.