HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 7 (08.11.2012)

1. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$, satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Osoita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(|X_n(\omega)| > \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ seuraa } \lim_{n\uparrow\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \;\; P\text{-melkein varmasti.}$$

   Vihje : muista Borel Cantellin lemma (kumpi ?).

2. Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \geq 0$ P-m.v. Osoita: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E_P(X^n) = n\int_0^{\infty} t^{n-1} P(X > t)dt = n\int_0^{\infty} t^{n-1} P(X \geq t)dt$$

   Vihje: luennoitsijan muistinpanoissa se on osoitettu silloin kun $n = 1$ Fubinin lauseen avulla.

3. Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ P-riippumattomat satunnaismuuttujiat joilla

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F(x)G(y)$$

   Osoita

   (a)

$$P(Y \leq X) = \int_{\mathbb{R}} G(x)F(dx)$$

   Vihje: käytä Fubini lause.

   (b) $P(Y = X) = \sum_{y\in\mathbb{R}} \Delta G(y)\Delta F(y)$

   (c) Oletamme että X on gaussinen satunnaismuuttuja ja Y on riippumaton ja 1-eksponentiaalinen. Yhteinen kertymäfunktio on tulomuotoinen

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)dy \right\} \big(1 - \exp(-y^+)\big)$$

   jossa $y^+ = \max(y, 0)$. Laske $P(Y \leq X)$ tässä tapauksessa.

   (d) Laske myös $E_P(\exp(tXY))$, $t \in \mathbb{R}$.
   Vihje Fubini lauseen mukaan saa valita integroinnin järjestystä.

4. Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ P-riippumattomia, jossa on X Poisson(1) jakautunut, ja Y on geometrisesti jakautunut parametrilla $q \in (0,1)$ siis

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \left(\sum_{0 \leq n \leq x} \frac{\exp(-1)}{n!} \right) \left(1 - (1-q)^{\lfloor y \rfloor} \right)$$

notaatiolla $\lfloor y \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} : y \geq n\}$

Laske $P(Y \leq X)$.