HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 6 (18.10.2012)

1. Olkoon $\varepsilon > 0$, ja $(X_n(\omega) \in \mathbb{N})$ jono satunnaismuuttujia (ei välttämättä riippumattomia !) jolla

$$P\big(X_n = n^{(1+\varepsilon)} - 1\big) = n^{-(1+\varepsilon)} = 1 - P(X_n = -1)$$

Peli tulkinta: X_n on pelaajan voitto arpajaisissa jossa arpalippu maksaa 1 €, ja voittaa $n^{(1+\varepsilon)}$ € todennäköisyydellä $n^{-(1+\varepsilon)}$.

   (a) Osoita: $E_P(X_n) = 0$

   (b) Osoita :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} \begin{cases} = \infty & \text{kun } \varepsilon \leq 0 \\ < \infty & \text{kun } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

   (c) Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$. Osoita että todennäköisyydellä $P = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = -1$$

   Vihje: käytä Borel Cantellin lemma (kumpi ?).

   Eli vaikka peli on odotusarvon mielessä reilu, pelaaja joka jatkaa pelaamaan lopulta häviää pystyyn!

2. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus . Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla

$$P(G > x) = \int_x^{\infty} \phi(y)dy, \quad \phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

   (a) Osoita: $\phi'(y) = \frac{d}{dy}\phi(y) = -y\phi(y)$.

   (b) Osoita epäyhtälö:

$$P(G > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (0.1)$$

   Vihje:

$$\phi(x) = \phi(\infty) - \int_x^{\infty} \phi'(y)dy$$

3. (a) Osoita

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \log x} dx = \infty$$

Vihje Laske: $\frac{d}{dx}\log(x\log(x))$

(b) Osoita

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\log n} \quad \begin{cases} = \infty & \text{kun } \varepsilon \leq 0 \\ < \infty & \text{kun } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

4. Olkoon $\{G_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ jono samoin jakautuneita standardi gaussisia satunnaismuuttujaa (ei välttämättä riippumattomia) Osoita :

$$P\left(\left\{ \omega : \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}} \right) \leq 1 \right\}\right) = 1$$

Vihje Tämä tarkoittaa että kaikille $\varepsilon > 0$,

$$P\big(\limsup_n A_n^\varepsilon\big) = 0$$

jossa

$$A_n^\varepsilon = \left\{ \omega : G_n(\omega) > (1+\varepsilon)\sqrt{2\log n} \right\}$$

käytä yläraja ja Borel-Cantellin (kumpi?) lemma.

5. Olkoon $\psi(x) = x^{-1}\phi(x)$.

Osoita

$$x^{-1}\phi(x) = \psi(+\infty) - \int_x^\infty \psi'(y)dy \leq (1 + x^{-2}) \int_x^\infty \phi(x)dx$$

josta seuraa alaraja

$$P(G > x) \geq \phi(x)\left(x + \frac{1}{x} \right)^{-1} \tag{0.2}$$

6. Olkoon nyt $\{G_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ jono samoin jakautuneita ja P-riippumattomia standardi gaussisia satunnaismuuttujaa.

Osoita

$$P\left(\left\{ \omega : \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}} \right) = 1 \right\}\right) = 1$$

Vihje Jää osoitettavaksi

$$P\left(\left\{\ \omega :\ \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}}\right) \geq 1\right\}\right) = 1,$$

eli kaikille $\varepsilon \geq 0$,

$$P\big(\limsup_n A_n^{-\varepsilon}\big) = 1$$

jossa

$$A_n^{-\varepsilon} = \big\{\ \omega : G_n(\omega) > (1-\varepsilon)\sqrt{2\log n}\big\}$$

käytä alaraja (0.2) ja Borel-Cantellin (kumpi?) lemma.