**HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 5 (11.10.2012)**

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus

1. • Osoita

$$2\pi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right)^2$$

Vihje Muuttujan vaihdolla $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, $r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$.

• On olemassa satunnaismuuttuja $G(\omega)$ jolla

$$P(G \leq x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \tag{0.1}$$

$G$:n jakauma kutsutaan standardiseksi Gaussiseksi jakaumaksi.
**Vihje** Valitse todennäköisyysavaruudeksi $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

• Mikä on $G(\omega)$:n jakauman tiheysfunktio ?

2. Olkoon $m \in R$ ja $\sigma > 0$, ja $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

• Laske $X$:n jakauman kertymäfumktio $P(X \leq x)$.
• Laske $X$:n jakauman tiheysfunktio.
• Todennäköisyysavaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, laske Radon-Nikodymin derivaatta (uskottavuusosamäärä)

$$\frac{dP_X}{dP_G}(x)$$

jossa $P_X(B) = P(X \in B)$ ja $P_G(B) = P(G \in B)$.
**Vihje** Uskottavuusosamäärä toteuttaa mitanvaihdon kaavaa

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{dP_X}{dP_G}(x) P_G(dx)$$

kaikille Borel-mitallisille funktioille $h(x) \geq 0$.

3. • Laske odotusarvo

$$E_P(\exp(\lambda G)) = \int_{\Omega} \exp(\lambda G(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda x) P_G(dx)$$

- Laske myös odotusarvo $E_P(\exp(\lambda X))$ jossa $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

4. Osoita että $\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} < \infty$ kun $s > 1$. $\zeta(s)$ kutsutaan Riemannin zeta funktioksi.

   Diskreettitodennäkoisyysavaruudessa $(\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}, P)$, jossa $P(\{n\}) := n^{-s}/\zeta(s)$, olkoon $E_p = \{n : p \text{ jakaa } n\} = p\mathbb{N}$.

   - Laske $P(E_p)$ kun $p$ on alkuluku.
   - Osoita että tapahtumat $(E_p : p \text{ on alkuluku})$ ovat $P$-riippumattomia.
   - Osoita Eulerin kaava

     $$P(\{1\}) = 1/\zeta(s) = \prod_{p \text{ alkuluku}} (1 - p^{-s})$$

     käytä riippumattomuutta.
   - Osoita ehdollisille todennäköisyydelle $P(pq\mathbb{N}|p\mathbb{N}) = P(q\mathbb{N})$.
   - Olkoon $X$ satunnaismuuttuja jolla $P(X = n) = n^{-s}/\zeta(s)$. Osoita

     $$P(\{\text{ ei ole olemassa } k > 1 \text{ jolla } k^2 \text{ jakaa } X\}) = 1/\zeta(2s)$$

   - Olkoon $X, Y$ $P$-riippumattomia jolla

     $$P(X = n, Y = m) = P(X = n)P(Y = m) = mn^{-s}/\zeta(s)^2.$$

     ja olkoon $R$ $X$ ja $Y$:n suurin yhteinen jakaaja. Osoita:

     $$P(\{R = n\}) = n^{-2s}/\zeta(2s)$$