HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 4 (1.10.2012)

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus

1. Osoita että todennäköisyys P on ali σ-additiivinen:

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \quad \text{kun } (A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$$

2. Olkoon $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei-vähenevä funktio, $F(t) \geq F(s)$ kun $t \geq s$. Osoita että F on Borel mitallinen, eli Borelin joukon käänteiskuva on Borelin joukko.

   Vihje: määritään yleistetty käänteisfunktio

$$\overleftarrow{F}(t) = \sup\{x : F(x) \leq t\}$$

   Ei-vähenevän funktion F käänteisfunktio ei ole yksikäsitteinen silloin kun $F(x)$ vakio jossakin välissä.

   Osoita että kun $q \in \mathbb{Q}$

$$\{t : F(t) \leq q\} = \left(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\right]$$

   vai

$$\{t : F(t) \leq q\} = \left(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\right)$$

   ja näytä että tämä riittää Borelin-mitallisuuteen.

3. Olkoon $X(\omega)$ $\mathbb{R}$-arvoinen satunnaismuuttuja, ja $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ ei-negatiivinen ja ei-vähenevä funktio. Todista Checbychevin epäyhtälö

$$P(X \geq t) \leq \frac{E_P(h(X))}{h(t)}$$

   Vihje: $h(X(\omega)) \geq h(t)\mathbf{1}(X(\omega) \geq t)$.

4. Olkoon P todennäköisyysmitta avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

   ja $X(\omega)$ $\mathbb{R}$-arvoinen satunnaismuuttuja eli Borel-mitallinen kuvaus, $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ kun $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Borelin joukko).

   Olkoon $F(t) := P(\omega : X(\omega) \leq t)$, joka kutsutaan todennäköisyysmitan kertymäfunktioksi. Osoita :

- F on kasvava
- F on oikealta jatkuva
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

5. Olkoon

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}\big(t \geq 1/n\big)$$

- Osoita että $F(t)$ toteuttaa edellisen tehtävän ehdot. On osoitettu luennolla

  Caratheodoryn lauseen avulla että on olemassa todennäköisyysmitta P todennäkköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ jolla $P((-\infty, t]) = F(t)$. Laske seuraavien joukkojen todennäköisyyksiä $P(A_i)$:
  $A_1 = [1, \infty)$, $A_2 = [1/10, \infty)$, $A_3 = \{ 0\}$,
  $A_4 = [0, 1/2)$, $A_5 = (-\infty, 0)$, $A_6 = (0, \infty)$.
- Identiteetti kuvaus $X(t) = t$ on satunnaismuuttuja (miksi ?) todennäköisyysavaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$. Laske $X(t)$:n odotusarvo $E_P(X)$ (P:n suhteen).

6. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$ satunnaisvektori.

   Olkoon $F(t_1, \ldots, t_d) = F(t) = P(X \leq t) := P(X_1 \leq t_1, \ldots, X_d \leq t_d)$ jossa $t \in \mathbb{R}^d$. Osoita :

- $F(t_1, \ldots, t_d)$ ei-vähenevä jokaisen koordinaatin t_i:n suhteen.
- $F(t_1, \ldots, t_d)$ on oikealta jatkuva jokaisen koordinaatin t_i:n suhteen.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(t_1, \ldots, t_{i-1} \underbrace{, x,}_{i-\text{koordinaatti}} t_{i+1}, \ldots, t_n) = 0,$
  $\forall 1 \leq i \leq d, \ t_1, \ldots t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$.
- $1 = F(\infty, \infty, \ldots, \infty) := \lim\limits_{t_1\uparrow+\infty,\ldots t_1\uparrow+\infty} F(t_1, t_2, \ldots, t_d)$
- Osoita että jos funktiolla $F : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ on edellisia ominaisuuksia, on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, 1]$ jolla $P((-\infty, t]) = F(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}^d$.
  Vihje: kun $d = 1$, väite on osoitettu luennolla Caratheodoryn lauseen avulla Vie läpi sama todistus d-ulotteisessa tapauksessa.