HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 3 (27.9.2012)

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jossa $\mathcal{F}$ on Ω:n σ-algebra, ja P on σ-additiivinen $\mathcal{F}$:ssa, määritellään mielivaltaisen joukon $G \subseteq \Omega$ ulkomitta

$$P^*(G) = \inf_{\{F_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$

jossa infimum otetaan yli kaikkien numeroituvien mitallisten peitteiden $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolla $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Caratheodoryn laajennuslauseen todistuksessa osoitettiin että P^* on ulkomitta, siis on numeroituvasti sub-σ-additiivinen, kasvava, ja $P^*(\emptyset) = 0$.

Määriteltiin myös σ-algebra $\mathcal{L}$ joka koostuu kaikista joukoista $A \subseteq \Omega$ jotka *jakaavat siististi* ulkomitan P^* seuraavalla tavalla

$$P^*(G) = P^*(G \cap A) + P^*(G \cap A^c) \quad \forall G \subseteq \Omega$$

$\mathcal{L}$ jäsenet kutsutaan myös P^*-mitallisiksi. Olemme myös osoittaneet että $P^* : \mathcal{L} \mapsto [0,1]$ on σ-additiivinen todennäköisyysmitta, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ ja $P^*(A) = P(A)$ kun $A \in \mathcal{F}$.

Määritellään nyt joukkoperheet

$$\mathcal{F}^P = \big\{A \subseteq \Omega : \exists B', B'' \in \mathcal{F} \text{ jolla } B' \supseteq A \supseteq B'' \text{ ja } P(B' \setminus B'') = 0\big\},$$
$$\mathcal{N}^P = \big\{A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathcal{F} \text{ jolla } B \supseteq A \text{ ja } P(B) = 0\big\} \qquad (\ P\text{-nolla joukot }\ )$$

1. P on oletetusti σ-additiivinen todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$. Osoita

$$P^*(G) = \inf_{F \in \mathcal{F} : F \supseteq G} P(F) \qquad \forall G \subseteq \Omega$$

2. Osoita : jokaiselle joukolle $G \subseteq \Omega$, on olemassa joukko $F \in \mathcal{F}$ jolla $F \supseteq G$ ja $P(F) = P^*(G)$.

   Vihje: Osoita ensin että on olemassa ei-kasvava jono $(F_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq G$, $\forall n$, ja $P(F_n) - 1/n \le P(G^*) \le P(F_n)$. Käytä todennäköisyyden P:n σ-additiivisuus.

3. Osoita että jokaiselle joukolle $G \in \mathcal{L}$, on olemassa joukko $E \in \mathcal{F}$ jolla $E \subseteq G$ and $P(E) = P^*(G)$.

   Vihje: soveltakaa tehtävän (2) tulosta joukolle G^c ja käytä oletusta $G \in \mathcal{L}$.

4. Osoita että $\mathcal{F}^P = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$, joka on pienin σ-algebra joka sisältää $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{N}^P$. Tämä on σ-algebran $\mathcal{F}$ P-täydennyys P-nolla mittaisilla joukoilla.

5. Osoita että $\mathcal{F}^P = \mathcal{L}$.

   Vihjeet: Osoittakseen että $\mathcal{N}^P \subseteq \mathcal{L}$, muista että ulkomitta P^* on kasvava ja subadditiivinen.

   Osoittakseen että $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \supseteq \mathcal{L}$, käytä tehtäviä 2,3.

6. Olkoon $\Omega = \mathbb{R}^d$, varustettuna avoimien joukkojen virittämällä Borelin σ-algebralla $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\{\ U \subseteq \mathbb{R}^d : U \text{ avoin } \}$.

   - Osoita: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\big\{ B(\mathbf{q}, n^{-1}\ ) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^d, n \in \mathbb{N}\big\}$,
     jossa $B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$ on avoin pallo $\mathbb{R}^d$:ssä
     Vihje: osoita ensin että avoin joukko on numeroituvan pallojen kokoelman yhdiste.
   - Osoita: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\big\{ \overline{B(\mathbf{q}, n^{-1}\ )} : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^d, n \in \mathbb{N}\big\}$
     jossa $\overline{B(\mathbf{x}, r)} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le r\}$ on suljettu pallo $\mathbb{R}^d$:ssä
   - Osoita:

     $$\begin{aligned}&\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \\ &\sigma\big\{ B(q_1, 1/n_1) \times B(q_2, 1/n_2) \times \cdots \times B(q_d, 1/n_d) : q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}, n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}\big\}\end{aligned}$$

     jossa $d = 1$ ja $B(x, r) = (x - r, x + r) \subseteq \mathbb{R}$ on avoin väli.
   - Osoita:

     $$\begin{aligned}&\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \\ &\sigma\big\{ \overline{B(q_1, 1/n_1)} \times \overline{B(q_2, 1/n_2)} \times \cdots \times \overline{B(q_2, 1/n_d)} : q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}, n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}\big\}\end{aligned}$$

     jossa $d = 1$ ja $\overline{B(x, r)} = [x - r, x + r] \subseteq \mathbb{R}$ on suljettu väli.
   - Osoita:

     $$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} &:= \overbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}^{d\text{-kertaa}} \\ &:= \sigma\big\{ B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_d : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ i = 1, \ldots, d\big\}\end{aligned}$$

     eli $\mathbb{R}^d$ avaruuden Borelin σ-algebra on $\mathbb{R}$:n Borelin σ-algebrien tulo σ-algebra.