HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 2 (20.9.2012)

1. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyys avaruus, jossa $\mathcal{F}$ on Ω:n σ-algebra, ja additiivinen mitta $P : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$. Osoita että P on σ-additiivinen jos ja vain jos kun

$$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}, \quad A_n \downarrow \emptyset$$

(eli $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$), seuraa

$$\Longrightarrow \quad P(A_n) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty\ .$$

2. Olkoon $(\Omega, \mathcal{A})$ todennäköisyys-avaruus jossa $\mathcal{A}$ on σ-algebra, ja

$$\mathcal{Q} \subseteq \{Q : \text{todennäköisyys } \mathcal{A} \mapsto [0,1]\}.$$

todennäköisyyksien kokoelma. Osoita että $c : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$ jossa

$$c(A) := \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \{\ Q(A)\}, \quad A \in \mathcal{A}$$

on ulkomitta (totetutaa Määritelmää 2.1.5 luentomonisteessa).

3. Olkoon $\Omega = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ja $\mathcal{E}_0 \subseteq 2^\Omega$ kokelma joukoista joilla on muotoa

$$E = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n],$$

jossa $n \in \mathbb{N}$ ja

$$-\infty \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \cdots \le a_n \le b_n \le +\infty,$$

Osoita $\mathcal{E}_0$ on algebra.

4. Olkoon funktio $F : (\mathbb{R} \cup \{\ +\infty\}) :\longrightarrow [0,1]$. Oletamme että F on

- ei-vähenevä: $F(a) \le F(b)$ kun $a \le b$,
- oikealta jatkuva: $F(a+) = F(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$, eli

$$F(b) \downarrow F(a) \ \text{ kun } b \downarrow a$$

- $F(+\infty) = 1$.

Kun joukolla $E \in \mathcal{E}_0$ on esitys (0.1), määritellään

$$P_0(E) = \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k))$$

Osoita että P_0 on additiivinen algebralla $\mathcal{E}_0$. (σ-additivisuutta todistetaan myöhemmin luennolla).

5. Olkoon $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{A}$, jossa $(\Omega, \mathcal{A})$ on todennäköisyysavaruus (siis $\mathcal{A}$ on σ-algebra).

   Määritelään

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_n = \left\{ \omega \in \Omega : \ \forall n \quad \exists k \geq n \text{ jolla } \omega \in A_k \right\}$$

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_n = \left\{ \omega \in \Omega : \ \exists n \text{ jolla } \forall k \geq n \quad \omega \in A_k \right\}$$

   Osoita :

   - $(\limsup_n A_n), (\liminf_n A_n) \in \mathcal{A}$
   - Indikaattorifunktioille pätee

$$\mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega) = \limsup_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega), \quad \mathbf{1}_{\liminf_n A_n}(\omega) = \liminf_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega).$$

6. Olkoon $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ binaari jonojen $\omega = (\omega_n : n \in \mathbb{N})$ avaruus.

   Määritellään sylinterin algebra $\mathcal{F}_n$, jossa $A \in \mathcal{F}_n$ jos ja vain jos a set $A_n \subseteq \{0, 1\}^n$ such that

$$A = \{\omega : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A_n\}.$$

   joillekin $A_n \subseteq \{0, 1\}^n$.

   - $\mathcal{F}_n$ on myös σ-algebra, selitä miksi.
   - Olkoon $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$, eli pienin σ-algebra joka sisältää kaikki sylinteri-σ-algebrat.
     Olkoon

$$\begin{aligned} L &= \{\omega : \exists \lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\} = \\ &= \{\omega : \limsup_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \liminf_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\} \end{aligned}$$

Osoita että $L \in \mathcal{F}_\infty$, mutta $L \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.
Vihje: Osoita että kun $q_1 < q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$,

$$\{\omega : \limsup_n n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i \in (q_1, q_2)\} \in \mathcal{F}_\infty \text{ ja}$$
$$\{\omega : \liminf_n n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i \in (q_1, q_2)\} \in \mathcal{F}_\infty$$