HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, Harjoitukset-10 (7.12.2012) ?

6.12 on itsenäisyyspäivä, mahdollisesti laskarit pidetään perjantaina 7.12, sovitaan tästä vielä luennolla.

1. Olkoon $X(\omega)$ Poisson(λ) jakautunut satunnaismuuttuja, $\lambda > 0$, ja $Y(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) > 0)$.

   a Laske satunnaismuuttujan X "elementaarinen" ehdollinen odotusarvo ehdolla tapahtumia $A = \{\omega : Y(\omega) = 1\}$ ja $A^c = \{\omega : Y(\omega) = 0\}$

   $$E_P(X|Y=1), \quad E_P(X|Y=0) .$$

   b Laske satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla σ-algebraa $\sigma(Y)$

   $$E_P(X|\sigma(Y))(\omega)$$

2. Olkoon $G_1(\omega)$ ja $G_2(\omega)$ riippumattomia standardi Gaussisia satunnaismuuttujat jolla

   $$P(G_1 \le x, G_2 \le y) = P(G_1 \le x)P(G_2 \le y) = \Phi(x)\Phi(y),$$
   $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\bigl(-\frac{y^2}{2}\bigr)dy$$

   Olkoon $M(\omega) = \max\bigl\{G_1(\omega), G_2(\omega)\bigr\}$.

   a) Laske $E_P(M|\sigma(G_1))(\omega)$.

   b) Laske $E_P(G_1|\sigma(M))(\omega)$. **Vihje** Katso tehtävän 5) vihjeet.

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla

   a) $P(X \in dx) = \mathbf{1}(x \ge 0)\exp(-x)dx$, X on 1-eskponentiaalinen

   b) $P(X \in dx) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}dx$, X on Cauchy jakautunut.

   Osoita: tapauksessa **a)** $E_P(|X|) < \infty$ ja tapauksessa **b)** $E_P(|X|) = \infty$

4. Olkoon $Y(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor = \max\{\ n \in \mathbb{Z} : n \le X(\omega)\} \in \mathbb{Z}$.

   Laske tapauksissa **a**) ja **b**) ehdollinen odotusarvo

   $$E_P(X|\sigma(Y))(\omega) \in \mathbb{R}$$

   Vihje Huomaat että σ-algebra $\sigma(Y)$ on numeroituvasti generoitu, eli on olemassa numeroituva $\mathcal{F}$-mitallinen ositus joka virittää σ-algebraa.

5. Olkoon $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ P riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$, siis

$$P(X \in dx, Y \in dy) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbf{1}_{[0,1]}(y)\, dx\, dy$$

Olkoon $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ ja $I(\omega) = \mathbf{1}(X(\omega) \le Y(\omega))$

(a) Laske $P(X > Y)$.

(b) Laske "elementaarinen" ehdollinen odotusarvon tapahtuman ehdolla

$$E_P(X | X > Y)$$

(c) Laske ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\sigma(I))(\omega)$$

(d) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(Z), I)(\omega)$.
Vihje Koska

$$Z(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) = Y(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))$$

voit osoitaa ensin (Kolmogorovin määritelmän kautta)

$$\begin{aligned}
&E_P(X|\sigma(Z), \sigma(I))(\omega)\ \mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\
&= E_P(X|\sigma(Y), \sigma(I))(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\
&= \frac{E_P(X\mathbf{1}(X > Y)|\sigma(Y))}{P(X > Y|\sigma(Y))(\omega)}\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))
\end{aligned}$$

Muistetaan että silloin kun X ja Y ovat P-riippumattomia,

$$E_P(f(X,Y)|\sigma(Y))(\omega) = E_P(f(X,y))\Big|_{y=Y(\omega)}$$

Vihje Laske ensin $E_P(X|\sigma(Z,I))$, jossa $I(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) \le Y(\omega))$ ja tietenkin$\sigma(Z,I) \supseteq \sigma(Z)$.

$$E_P(Z|\sigma(Z)) = E_P\big(E_P(X|\sigma(Z,I))\big|\sigma(Z)\big)$$