Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 10, 7.12.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. Huomataan, että $\sigma(Y) = \sigma(A, A^c)$. Soveltamalla teoreeman 10.0.2 saadaan lasketut:
   (a)
$$\mathbb{E}(X \mid Y=0) = \mathbb{E}(X \mid A^c) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A^c})}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X=0\}})}{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\mathbb{E}(0)}{e^{-\lambda}} = 0$$
$$\mathbb{E}(X \mid Y=1) = \mathbb{E}(X \mid A) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X>0\}})}{\mathbb{P}(X>0)} = \frac{\mathbb{E}(X)}{1-\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}$$
   melkein varmasti.
   (b)
$$\mathbb{E}\big(X \mid \sigma(Y)\big) = \mathbb{E}(X \mid A)\mathbf{1}_A + \mathbb{E}(X \mid A^c)\mathbf{1}_{A^c} = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\mathbf{1}_A + 0 = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\mathbf{1}_{\{Y=1\}}$$
   melkein varmasti.

2. (a) Selvästikin $\mathbb{E}(|M|) < \infty$ ja funktio $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ on Borel-mitallinen, joten satunnaismuuttujien G_1 ja G_2 riippumattomuuksien (lauseen 10.5.1) ja harjoituksen 6 tehtävän 2 nojalla
   Olkoon
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2) \quad \text{standardi Gaussinen tiheys}$$
$$\Phi(x) = \int_{\infty}^{x}\phi(x)dx \quad \text{standardi Gaussinen kertymäfunktio}$$
   joilla $\Phi'(x) = \phi(x)$, $\phi'(x) = -x\phi(x)$.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M \mid G_1) &= \int_{\mathbb{R}} \max\{G_1, y\}\phi(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{G_1} \max\{G_1, y\}\phi(y)dy + \int_{G_1}^{\infty} \max\{G_1, y\}\phi(y)dy \\ &= G_1\int_{-\infty}^{G_1}\phi(y)dy - \int_{G_1}^{\infty}\phi'(y)dy \\ &= G_1\Phi(G_1) + \phi(G_1) \quad \text{m.v.}\end{aligned}$$
   (b) Edetään tehtävän ohjeen mukaisesti:
   Lasketaan ensin
$$E_P(G_1|\sigma(M, I))(\omega)$$
   jossa $I(\omega) = \mathbf{1}(G_1(\omega) \geq G_2(\omega)) = \mathbf{1}(M_1(\omega) = G_1(\omega))$.

Koska

$$G_1(\omega) = G_1(\omega)I(\omega) + G_1(\omega)(1 - I(\omega)) = M(\omega)I(\omega) + G_1(\omega)(1 - I(\omega))$$

seuraa että

$$\begin{aligned} &E_P(G_1|\sigma(Z,I))(\omega) = E_P(MI|\sigma(M,I))(\omega) + E_P(G_1(1-I)|\ \sigma(M,I))(\omega) \\ &= M(\omega)I(\omega) + E_P(G_1|\ \sigma(M,I))(\omega)(1-I)(\omega) \end{aligned}$$

Koska $M(\omega)(1 - I(\omega)) = G_2(\omega)(1 - I(\omega))$, seuraa kaikille satunnaismuuttujille $X \in L^1(P)$

$$\begin{aligned} &E_P(X|\sigma(M,I))(\omega)(1 - I(\omega)) = E_P(X|\sigma(G_2,I))(\omega)(1 - I(\omega)) = \\ &E_P(X|\sigma(M,I))(\omega)\mathbf{1}(G_2(\omega) = M_2(\omega)) = E_P(X|\sigma(G_2,I))(\omega)\mathbf{1}(G_2(\omega) = M_2(\omega)) \end{aligned}$$

Tätä voidaan tarkistaa Kolmogorovin määritelmän kautta: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$E_P\big(X\mathbf{1}_B(M)\mathbf{1}(G_2 = M)\big) = E_P\big(X\mathbf{1}_B(G_2)\mathbf{1}(G_2 = M)\big)$$

Erityisesti

$$\begin{aligned} &E_P(G_1|\ \sigma(M,I))(\omega)(1-I)(\omega) = E_P(G_1|\ \sigma(G_2,I))(\omega)(1-I(\omega)) \\ &= E_P(G_1|\sigma(G_2), \{\ G_1 < G_2\})(1 - I(\omega) = \\ &\frac{E_P(G_1\mathbf{1}(G_1 < G_2)|\sigma(G_2))(\omega)}{P(G_1 < G_2|\sigma(G_2))(\omega)}(1 - I(\omega)) = \\ &\frac{E_P(G_1\mathbf{1}(G_1 < y)}{P(G_1 < y)}\Bigg|_{y=M(\omega)} \mathbf{1}(M_(\omega) = G_2(\omega)) = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{M(\omega)} x\phi(x)dx}{\Phi(M(\omega))}(1 - I(\omega)) = \frac{-\int_{-\infty}^{M(\omega)} d\phi(x)}{\Phi(M(\omega))}(1 - I(\omega)) = \\ &-\frac{\phi(M(\omega))}{\Phi(M(\omega))}(1 - I(\omega)) \end{aligned}$$

Eli

$$E_P(G_1|\sigma(M,I))(\omega) = M(\omega)I(\omega) - \frac{\phi(M(\omega))}{\Phi(M(\omega))}(1 - I(\omega))$$

Otetaan ehdollinen odotusarvo pienemmän σ-algebran $\sigma(M)$ suhteen,

$$\begin{aligned} &E_P(G_1|\sigma(M)(\omega) = E_P\bigg(E_P(G_1|\sigma(M,I))\bigg|\sigma(M)\bigg)(\omega) \\ &= M(\omega)P(G_1 \geq G_2|\sigma(M))(\omega) - \frac{\phi(M(\omega))}{\Phi(M(\omega))}P(G_1 < G_2|\sigma(M))(\omega) \end{aligned}$$

Koska (G_1, G_2) ja (G_2, G_1) ovat samoin jakautuneita pareja (niiden yhteisjakauma on symmetrinen),

$$P(G_1 \geq G_2|\sigma(M))(\omega) = P(G_1 < G_2|\sigma(M))(\omega) = \frac{1}{2}, \quad (P = 1)$$

ja

$$E_P(G_1|\sigma(M)(\omega) = \frac{1}{2}\left(M(\omega) - \frac{\phi(M(\omega))}{\Phi(M(\omega))}\right)$$

Huomautus: koska $G_1(\omega) \leq M(\omega)$ ja ehdollinen odotusarvo on ei-negatiivinen operaattori, oli etukäteen selvää että $E_P(G_1|\sigma(M))(\omega) \leq M(\omega)$.

3. (a) Todetaan, että

$$\mathbb{P}(X > 0) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

joten $X > 0$ melkein varmasti. Nyt tiedosta $X \sim \exp(1)$ seuraa, että

$$\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X) = 1 < \infty.$$

(b) Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|) &= \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t \ln(1+x^2) = \frac{1}{\pi} \lim_{t\to\infty} \ln(1+t^2) = \infty.\end{aligned}$$

4. (a) Tehtävän 3.(a) nojalla $X > 0$ melkein varmasti, joten joukon Ω ositus on $\{A_n\}$, missä $A_n = \{Y = n\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Teoreeman 10.0.2 nojalla

$$\mathbb{E}\big(X \mid \sigma(Y)\big) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}(X \mid A_n) \mathbf{1}_{A_n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A_n})}{\mathbb{P}(A_n)} \mathbf{1}_{A_n} \quad \text{m.v.}$$

Lasketaan yllä olevat termit:

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A_n}) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{n \leq X < n+1\}}) = \int_n^{n+1} xe^{-x} dx = \Big/_n^{n+1} e^{-x}(1-x) = (n - ne^{-1} - 1)e^{-n}$$

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(n \leq X < n+1) = F_X(n+1) - F_X(n) = \frac{e-1}{e} e^{-n}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kysytty ehdollinen odotusarvo on siis

$$\mathbb{E}\big(X \mid \sigma(Y)\big) = \frac{e}{e-1} \sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{e-1}{e} n - 1\Big) \mathbf{1}_{\{Y=n\}} \quad \text{m.v.}$$

(b) Lasketaan kuten yllä $\mathbb{E}(X \mid A_k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A_k}) = \int_k^{k+1} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \Big/_{k}^{k+1} \ln(1+x^2) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(k+1)^2+1}{k^2+1}$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{\pi(1+x)^2} = \frac{1}{\pi} \Big/_{k}^{k+1} \arctan x = \frac{1}{\pi}(\arctan(k+1) - \arctan k)$$

$$\mathbb{E}(X \mid A_k) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A_k})}{\mathbb{P}(A_k)} = \frac{\ln \frac{(k+1)^2+1}{k^2+1}}{2(\arctan(k+1) - \arctan k)} \quad \text{m.v.}$$

Selvästikin $\mathbb{E}(X \mid A_k) < \infty$ melkein varmasti kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, joten ehdollinen odotusarvo on määritelty:

$$\mathbb{E}\big(X \mid \sigma(Y)\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(X \mid A_k)\mathbf{1}_{A_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\ln \frac{(k+1)^2+1}{k^2+1}}{2(\arctan(k+1) - \arctan k)} \mathbf{1}_{\{Y=k\}} \quad \text{m.v.}$$

5. (a) Jatkuvan jakauman ominaisuuden ja harjoituksen 7 tehtävän 3.(a) nojalla

$$\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(Y \le X) = \int_{\mathbb{R}} G(x)dF(x) = \int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

(b) Teoreeman 10.0.2 ja edellisen kohdan nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X \mid X > Y\big) &= \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X>Y\}})}{\mathbb{P}(X > Y)} = 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{(X,Y)}}(x\mathbf{1}_{\{x>y\}}) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y}(x\mathbf{1}_{\{x>y\}}) \\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{x>y\}} d\mathbb{P}_X(x)d\mathbb{P}_Y(y) = 2\int_0^1 x \int_0^x dydx = 2\int_0^1 x^2 dx \\ &= 2 \Big/_{0}^{1} \frac{1}{3}x^3 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(c) Vastaavasti laskemalla kuten edellä saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X \mid X \le Y\big) &= \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X\le Y\}})}{\mathbb{P}(X \le Y)} = 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{(X,Y)}}(x\mathbf{1}_{\{x\le y\}}) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y}(x\mathbf{1}_{\{x\le y\}}) \\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{x\le y\}} d\mathbb{P}_X(x)d\mathbb{P}_Y(y) = 2\int_0^1 \Big(\int_0^y xdx\Big)dy = 2\int_0^1 \frac{1}{2}y^2 dy \\ &= 2 \Big/_{0}^{1} \frac{1}{6}y^3 = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

joten kysytty ehdollinen odotusarvo on

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X \mid \sigma(I)\big) &= \mathbb{E}\big(X \mid X > Y\big)\mathbf{1}_{\{X>Y\}} + \mathbb{E}\big(X \mid X \le Y\big)\mathbf{1}_{\{X\le Y\}} \\ &= \frac{2}{3}\mathbf{1}_{\{X>Y\}} + \frac{1}{3}\mathbf{1}_{\{X\le Y\}} = \frac{1}{3}\mathbf{1}_{\{X>Y\}} + \frac{1}{3} \quad \text{m.v.}\end{aligned}$$

(d) Tehtävän vihjeen nojalla

$$\mathbb{E}\big(X \mid \sigma(Z), \sigma(I)\big) = \frac{\mathbb{E}\big(X\mathbf{1}_{\{X>Y\}} \mid \sigma(Y)\big)}{\mathbb{P}\big(X > Y \mid \sigma(Y)\big)}\mathbf{1}_{\{X>Y\}} + \frac{\mathbb{E}\big(X\mathbf{1}_{\{X\le Y\}} \mid \sigma(Y)\big)}{\mathbb{P}\big(X \le Y \mid \sigma(Y)\big)}\mathbf{1}_{\{X\le Y\}}$$

melkein varmasti. Lasketaan yllä olevat termit käyttäen tehtävän toiseen vihjeen (vrt. teht. 2.(a)):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X\mathbf{1}_{\{X>Y\}} \mid \sigma(Y)\big) &= \int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{x>Y\}} d\mathbb{P}_X(x) = \int_Y^1 x dx = \Big/_{Y}^{1} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(1 - Y^2) \\ \mathbb{E}\big(X\mathbf{1}_{\{X\le Y\}} \mid \sigma(Y)\big) &= \int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{x\le Y\}}\mathbf{1}_{[0,1]} dx = \int_0^Y x dx = \Big/_{0}^{Y} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}Y^2 \\ \mathbb{P}\big(X > Y \mid \sigma(Y)\big) = \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{\{X>Y\}} \mid \sigma(Y)\big) &= \int_0^1 \mathbf{1}_{\{x>Y\}} dx = \int_Y^1 dx = 1 - Y \\ \mathbb{P}\big(X \le Y \mid \sigma(Y)\big) = \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{\{X\le Y\}} \mid \sigma(Y)\big) &= \int_0^1 \mathbf{1}_{\{x\le Y\}} dx = \int_0^Y dx = Y\end{aligned}$$

melkein varmasti. Kokoamalla nämä tulokset saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X \mid \sigma(Z), \sigma(I)\big) &= \frac{\frac{1}{2}(1-Y)(1+Y)}{1-Y}\mathbf{1}_{\{X>Y\}} + \frac{\frac{1}{2}Y^2}{Y}\mathbf{1}_{\{X\le Y\}} \\ &= \frac{1}{2}(1+Y)\mathbf{1}_{\{X>Y\}} + \frac{1}{2}Y\mathbf{1}_{\{X\le Y\}} \\ &= Y + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{X>Y\}} \quad \text{m.v.}\end{aligned}$$