Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 1, 13.9.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa N.)

1. Valitaan matriisiksi $A = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Sylvesterin lemman nojalla
$$\det(Id_n - AB) = \det(Id_1 - BA) = \det[1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)] = 1 - p_1 - \cdots - p_n.$$

2. Tehtävässä oletetaan, että $W \neq \mathbf{0}$. Voidaan olettaa ilman rajoituksia, että $w_i > 0$ kaikilla $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi summa lauseke (vakio)
$$S_W = \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

   a) Osoitetaan, että P_W toteuttaa *De Finettin todennäköisyyden aksioomat*:
   A1) (Ei-negatiivisuus). Olkoon $B \subseteq \Omega$. Koska $\mathbf{1}_B(\omega) \in \{0, 1\}$ kaikilla $\omega \in B$, niin
$$\mathbb{P}_W(B) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_B(\omega_i)}{S_W} \geq \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot 0}{S_W} = 0.$$
   A2) (Varma tapahtuma). Koska $A \subseteq \Omega$, niin
$$\mathbb{P}_W(\Omega) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_\Omega(\omega_i)}{S_W} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot 1}{S_W} = \frac{S_W}{S_W} = 1.$$
   A3) (Additiivisuus). Olkoon erilliset joukot $B_1, B_2, \dots, B_k \subset \Omega$. Merkitään $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$. Joukkojen erillisyyden nojalla $\mathbf{1}_B = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{B_j}$. Siis
$$\mathbb{P}_W(\bigcup_{j=1}^k B_j) = \mathbb{P}_W(B) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_B(\omega_i)}{S_W} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k w_i \mathbf{1}_{B_j}(\omega_i)}{S_W}$$
$$= \sum_{j=1}^k \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_{B_j}(\omega_i)}{S_W} = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}_W(B_j).$$

   b) *P_W-varmat tapahtumat*: Olkoon B varma tapahtuma. Tällöin
$$\mathbb{P}_W(B) = 1 \iff \omega \in B \quad \forall \omega \in A \iff A \subseteq B.$$
   Siis kaikki varmat tapahtumat ovat $\mathcal{V} \doteq \{B : A \subseteq B\}$.

   c) Olkoon $w > 0$. Tällöin määritelmän nojalla
$$\mathbb{P}_w(B) = \mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega \in B \\ 0, & \text{kun } x \notin B, \end{cases}$$

kaikilla $B \subseteq \Omega$. Yleisesti voidaan asettaa

$$\mathbb{P}_w(B) = \mathbf{1}_B(\omega)$$

kaikille $w \in \mathbb{R}_+$. Koska $\mathbb{P}_w(\Omega \setminus \{\omega\}) = \mathbf{1}_{\Omega\setminus\{\omega\}}(\omega) = 0$ (mahdoton tapahtuma), *sopimuksen X hinta* on

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_w}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_w}(\mathbf{1}_{\{\omega\}}X) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_w}(\mathbf{1}_{\Omega\setminus\{\omega\}}X) = X(\omega)\mathbb{P}_w(\omega) + 0 = X(\omega).$$

3. (jatko). Tehtävässä oletetaan, että $(WZ)(\omega_i) \neq 0$ jollain $\omega_i \in A$ ts. $S_{WZ} > 0$. Selvästikin

$$(WZ)(\omega) = \begin{cases} w_i z_i, & \text{kun } \omega = \omega_i \in A \\ 0, & \text{kun } \omega \notin A. \end{cases}$$

Merkitään $Y = ZX$. Koska $\mathbb{P}_{WZ}(\Omega \setminus A) = \mathbb{P}_W(\Omega \setminus A) = 0$, niin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_W}(ZX) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_W}(Y) &= \sum_{\omega\in A} Y(\omega)\mathbb{P}_W(\omega) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{P}_W(\omega_i) = \sum_{i=1}^n z_i x_i \frac{w_i}{S_W} \\ &= \frac{S_{WZ}}{S_W}\sum_{i=1}^n x_i \frac{(wz)_i}{S_{WZ}} = \frac{S_{WZ}}{S_W}\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}_{WZ}(\omega_i) = \frac{S_{WZ}}{S_W}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{WZ}}(X) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^n z_i \frac{w_i}{S_W}\Big) \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{WZ}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_W}(Z)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{WZ}}(X). \end{aligned}$$

4. (jatko). Koska $\mathbb{P}_W(C) > 0$, niin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_W(B \mid C) = \mathbb{P}_{W\mathbf{1}_C}(B \mid C) &= \frac{\sum_{i=1}^n (w_i \mathbf{1}_C(\omega_i))\mathbf{1}_B(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_C(\omega_i)} = \frac{\frac{1}{S_W}\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_{B\cap C}(\omega_i)}{\frac{1}{S_W}\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_C(\omega_i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_W(B\cap C)}{\mathbb{P}_W(C)} \end{aligned}$$

kaikilla $B \subseteq \Omega$.

Osoitetaan, että kuvaus $P_W(\cdot \mid C) : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ toteuttaa *De finettin todennäköisyyden aksioomat*:

A1) (Ei-negatiivisuus). Olkoon $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Koska $\mathbb{P}_W(B \cap C) \geq 0$ ja $\mathbb{P}_W(C) > 0$, niin

$$\mathbb{P}_W(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}_W(B\cap C)}{\mathbb{P}_W(C)} \geq \frac{0}{\mathbb{P}_W(C)} = 0.$$

A2) (Varma tapahtuma). Koska $C \subseteq \Omega$, niin

$$\mathbb{P}_W(\Omega \mid C) = \frac{\mathbb{P}_W(\Omega\cap C)}{\mathbb{P}_W(C)} = \frac{\mathbb{P}_W(C)}{\mathbb{P}_W(C)} = 1.$$

A3) (Additiivisuus). Olkoon erilliset joukot $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{P}(\Omega)$. Tällöin myös $B_1 \cap C, B_2 \cap C \dots, B_n \cap C \in \mathcal{P}(\Omega)$ ja ovat erillisiä.
Tehtävän 2 nojalla kuvaus P_W on additiivinen, joten

$$\mathbb{P}_W(\bigcup_{i=1}^n B_i \mid C) = \frac{\mathbb{P}_W\Big(\big(\bigcup_{i=1}^n B_i\big) \cap C\Big)}{\mathbb{P}_W(C)} = \frac{\mathbb{P}_W\Big(\bigcup_{i=1}^n B_i \cap C\Big)}{\mathbb{P}_W(C)} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}_W(B_i \cap C)}{\mathbb{P}_W(C)}$$
$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_W(B_i \mid C).$$

5. (jatko). Merkitään $Q(B) = \mathbb{P}(B \mid C)$ kaikilla $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Koska $\mathbb{P}_W((\Omega \setminus A) \cap C) = 0$, niin $Q(\Omega \setminus A) = 0$. Siis sopimuksen X odotusarvo ehdolla C on

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_W}(X \mid C) = \mathbb{E}_Q(X) = \sum_{i=1}^n X(\omega_i) Q(\omega_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}_W(\{\omega_i\} \cap C \mid C)$$
$$= \frac{1}{\mathbb{P}_W(C)} \sum_{\omega_i \in C} \frac{x_i w_i}{S_W}.$$

6. Palautetaan mieleen algebran kurssilta, että kolmikko $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ on *rengas*, jos pari $(\mathcal{R}, +)$ on Abelin ryhmä ja kertolasku on suljettu, assosiatiivinen ja distributiivinen.

Tapa 1. Havaitaan, että

$$\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_{A\setminus B} + \mathbf{1}_{B\setminus A} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_{A\cap B},$$

joten $\mathbf{1}_{(A\Delta B)}$ on kongruentti $(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)$:n kanssa modulo 2, merkitään

$$\mathbf{1}_{A\Delta B} \equiv \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B.$$

$(\mathcal{P}(\Omega), \Delta)$ on Abelin ryhmä:

1° (Yhteenlasku on suljettu). Jos $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, niin suoraan yhteenlasku määritelmästä seuraa, että $A\Delta B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2° (Nollalaki). Koska $A\Delta\emptyset = A$ kaikilla $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, nolla-alkio on tyhjäjoukko $\emptyset$ (eli identiteettijäsen operaation Δ suhteen).
3° (Käänteisalkiolaki). Koska $A\Delta A = \emptyset$ kaikilla $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, jokaisella joukolla on käänteisalkionsa, nimittäin joukko itse.
4° (Assosiatiivilaki). Olkoon $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$. Tällöin

$$\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} \equiv \mathbf{1}_{A\Delta B} + \mathbf{1}_C \equiv (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C \equiv \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C)$$
$$\equiv \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B\Delta C} \equiv \mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)},$$

mistä seuraa yhteenlaskun assosiatiivisuus $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
5° (Kommutatiivilaki). Suoraan yhteenlasku määritelmästä seuraa, että $A\Delta B = B\Delta A$ kaikilla $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Kertolasku on suljettu, assosiatiivinen ja distributiivinen:

1° (Suljettulaki). Jos $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, niin potenssijoukon määritelmästä seuraa, että $A \cap B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2° (Assosiatiivilaki). Tunnetusti $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ kaikilla $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$.
3° (Distributiivilaki). Olkoon $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{(A\Delta B)\cap C} &\equiv \mathbf{1}_{A\Delta B}\mathbf{1}_C \equiv (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C \equiv \mathbf{1}_A\mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B\mathbf{1}_C \equiv \mathbf{1}_{A\cap C} + \mathbf{1}_{B\cap C}\\ &\equiv \mathbf{1}_{(A\cap C)\Delta(B\cap C)},\end{aligned}$$

mistä seuraa kertolaskun distributiivilaki $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$. Samoin osoitetaan $C \cap (A\Delta B) = (C \cap A)\Delta(C \cap B)$.

Tapa 2. Tehtävän voi myös osoittaa suoraan laskemalla. Esimerkiksi kertolaskun distributiivi- eli osittelulaki:

$$\begin{aligned}C \cap (A\Delta B) &= C \cap \Big((A \cup B) \cap (A \cap B)^c\Big) = \Big((C \cap A) \cup (C \cap B)\Big) \cap (A \cap B)^c\\ &= \Big((C \cap A) \cup (C \cap B)\Big) \cap (A \cap B)^c \bigcup \underbrace{\Big((C \cap A) \cup (C \cap B)\Big) \cap C^c}_{=\emptyset}\\ &= \Big((C \cap A) \cup (C \cap B)\Big) \cap (A \cap B \cap C)^c\\ &= (C \cap A)\Delta(C \cap B).\end{aligned}$$