HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, Ensimmäinen välikoe , uusinta (15.11.2012)

1. Olkoon $X(\omega)$ $\mathbb{R}$-arvoinen satunnaismuuttuja, ja $F(t) = P(X \le t)$ sen jakauman kertymäfunktio.

   Osoita:

   (a) $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$,

   (b) $t \mapsto F(t)$ on oikealta jatkuva, eli $F(t+) := \lim_{u\downarrow t} F(u) = F(t)$.

   (c) $P(X = t) = \Delta F(t) := F(t) - F(t-)$ jossa $F(t-) := \lim_{s\uparrow t} F(s)$ on limes vasemmalta puolelta.

   (d) joukko

   $$D := \big\{ t \in \mathbb{R} : \; P(X = t) \neq 0 \big\}$$

   on korkeintaan numeroituva. Onko D Borel mitallinen ?

   Vihje Osoita ensin että joukko

   $$D_n := \Big\{ t \in \mathbb{R} : \; P(X = t) \ge \frac{1}{n} \Big\}$$

   on äärellinen.

2. (a) Todista Fatou:n lemma: jos $\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ satunnais-muuttujen jono todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jossa $X_n(\omega) \ge 0$ P-melkein varmasti,

   $$E_P\big(\liminf_n X_n\big) \le \liminf_n E_P(X_n)$$

   Vihje: kaytä monotonisen konvergenssin lause.

   (b) Todista käänteinen Fatoun lemma:
   jos $0 \le X_n(\omega) \le X(\omega)$ P-melkein varmasti $\forall n \in \mathbb{N}$,
   jossa $E_P(X) < \infty$, seuraa

   $$\limsup_n E_P(X_n) \le E_P\big(\limsup_n X_n\big)$$

   Vihje: $\limsup\limits_n X_n(\omega) = -\liminf\limits_n \big(X(\omega) - X_n(\omega)\big) + X(\omega)$

3. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja, eli

   $$P(G \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\bigg(-\frac{y^2}{2}\bigg) dy$$

(a) Laske $E_P\big(\exp(tG)\big) \in \mathbb{R}_+$, kun $t \in \mathbb{R}$.

(b) Laske $E_P\Bigg(\exp\big(G^2\, t/2\big)\Bigg) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, kun $t \in \mathbb{R}$.

4. Olkoon satunnaismuuttujat $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$:

$$P(X_n \le x) = x \qquad \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$$

Olkoon $Y_n(\omega) = \max\big\{ X_k(\omega) : 1 \le k \le n\big\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Osoita ensin $Y_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 1$, eli stokastisen konvergenssin mielessä.

(b) Käytä Borel Cantellin lemma (kumpi?) osoittaakseen $Y_n(\omega) \longrightarrow 1$ myös P-melkein varmasti.

(c) Osoita että $Y_n \stackrel{L^1(P)}{\longrightarrow} 1$ eli myös $L^1(P)$-konvergenssin mielessä.