HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, Ensimmäinen välikoe, ratkaisut (01.11.2012)

Välikokeen uusinta pidetään torstaina 15.11 yleistentin tilaisuudessa. Olet tervetullut tenttimaan uudelleen jos tämän jälkeen haluat vielä parantaa arvosanasi.

1. Olkoon satunnaismuuttuja $X \in L^1(\mathbb{P})$. Osoita,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(X\mathbf{1}_{\{|X|\geq n\}}\right) = 0.$$

R. Koska $|X(\omega)| < \infty$, $\forall\omega$, seuraa $X(\omega)\mathbf{1}(|X(\omega)| > n) \to 0$ $\forall\omega$, kun $n \to \infty$.

Koska $|X(\omega)\mathbf{1}(|\ X(\omega) > n)|\ \leq |X(\omega)|$ $\forall\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$, jossa oletetusti $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|X|) < \infty$, väite seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta.

Vaihtoehtoinen todistus : $\forall\omega \in \Omega$,

$$X(\omega)\mathbf{1}(|X(\omega)| > n) = X^+(\omega)\mathbf{1}(X^+(\omega) > n) - X^-(\omega)\mathbf{1}(X^-(\omega) > n)$$

jossa $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$, ja

$$0 \leq X^{\pm}(\omega)\mathbf{1}(X^{\pm}(\omega) \leq n) \uparrow X^{\pm}(\omega) \text{ kun } n \uparrow \infty.$$

Monotonisen konvergenssin lauseesta

$$E_P(X^{\pm}\mathbf{1}(X^{\pm} \leq n)) \uparrow E_P(X^{\pm}) < \infty$$

kun $n \uparrow \infty$, siksi odotusarvon lineaarisuudesta

$$E_P(X^{\pm}\mathbf{1}(X^{\pm} > n)) = E_P(X^{\pm}) - E_P(X^{\pm}\mathbf{1}(X^{\pm} \leq n)) \downarrow 0$$

Tässä argumentissa on myös tarvitaan oletusta $E_P(X^{\pm}) < +\infty$, eli $X \in L^1(P)$.

2. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ ja $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ satunnaismuuttujia todennäköisyyskentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Oletetaan, että $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ja $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ (eli stokastisen konvergenssin mielessä).

Osoita :

(a) $(X_n + Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X + Y)$.

(b) $(X_nY_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$.

Vihje Kun $\eta > 0$,

$$\big\{\omega : |X(\omega) + Y(\omega)| > \eta\big\} \subseteq \big\{\omega : |X(\omega)| + |Y(\omega)| > \eta\big\}$$
$$\subseteq \big\{\omega : |X(\omega)| > \eta/2\big\} \bigcup \big\{\omega : |Y(\omega)| > \eta/2\big\},$$
$$\big\{\omega : |X(\omega)Y(\omega)| > \eta\big\} \subseteq \big\{\omega : |X(\omega)| > \sqrt{\eta}\big\} \bigcup \big\{\omega : |Y(\omega)| > \sqrt{\eta}\big\}$$

R. a) Merkitään $\widetilde{X}_n = (X_n - X)$, $\widetilde{Y}_n = (Y_n - Y)$, Vihjeestä seuraa

$$\mathbb{P}\big(|\widetilde{X}_n(\omega) + \widetilde{Y}_n(\omega)| > \eta\big) \le \mathbb{P}\Bigg(\big\{\omega : |\widetilde{X}(\omega)| > \eta/2\big\} \bigcup \big\{\omega : |\widetilde{Y}(\omega)| > \eta/2\big\}\Bigg)$$
$$\le \mathbb{P}\big(|\widetilde{X}(\omega)| > \eta/2\big) + \mathbb{P}\big(|\widetilde{Y}(\omega)| > \eta/2\big) \longrightarrow 0 \text{ kun } n \to \infty$$

koska oletetusti $\widetilde{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ ja $\widetilde{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

b) Kolmio epäyhtälön avulla

$$|X_nY_n - XY| = \big|\ (X_n - X)(Y_n - Y) + X(Y_n - X) + Y(\ X_n - X)\big|$$
$$\le |(X_n - X)(Y_n - Y)| + |X(Y_n - Y)| + |Y(X_n - X)|$$

Väite seuraa tehtävän a) kohdasta kun osoitamme

$$|X_n - X||Y_n - Y| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad |X(Y_n - Y)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad |Y(X_n - X)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Kun $\eta, K > 0$

$$\big\{\omega : |Y(\omega)(\ X_n(\omega) - X(\omega))| > \eta\big\} \subseteq$$
$$\Big(\big\{\ |Y(\omega)| \le K)\big\} \cap \big\{\ \omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \eta/K\big\}\Big)$$
$$\bigcup \Big(\big\{\ \omega : |Y(\omega)| > K\big\} \cap \big\{\ \omega : |Y(\omega)(X_n(\omega) - X(\omega))| > \eta\big\}\Big)$$
$$\subseteq \big\{\ \omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \eta/K\big\} \cup \big\{\ \omega : |Y(\omega)| > K\big\}$$

josta seuraa

$$\mathbb{P}\big(|Y(X_n - X)| > \eta\big) \le \mathbb{P}\big(|X_n - X| > \eta/K\big) + \mathbb{P}\big(|Y| > K\big)$$

Nyt koska $|Y(\omega) < \infty \ \forall \omega \in \Omega$, todennäköisyyden σ-additiivisuudesta seuraa $\mathbb{P}\big(|Y| > K\big) \ \to 0$ kun $K \to \infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan ensin K tarpeeksi suureksi jolla

$$\mathbb{P}\big(|Y| > K\big) < \varepsilon\ .$$

Koska $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, kun K on kiinnitetty ja n on tarpeeksi suuri

$$\mathbb{P}\big(|X_n - X| > \eta/K\big) < \varepsilon, \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}\big(|Y(X_n - X)| > \eta\big) < 2\varepsilon$$

eli $Y(X_n - X) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ kun $n \to \infty$.
Vaihtamaalla parien (X_n, X) ja (Y_n, Y):n roolit seuraa myös

$$X(Y_n - Y) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Vihjeen perusteella

$$\mathbb{P}\big(|\ (X_n - X)(Y_n - Y)|\ > \eta) \le \mathbb{P}\big(|\ X_n - X|\ > \sqrt{\eta}) + \mathbb{P}\big(|\ Y_n - Y|\ > \sqrt{\eta}) \longrightarrow 0$$

kun $n \to \infty$, joka tarkoittaa $(X_n - X)(Y_n - Y) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

3. Olkoon $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ tapahtumien jono.

   Todista ensimmäinen Borel-Cantelli lemma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}\big(\limsup_n A_n) = 0$$

   R. Lue todennäköisyysteorian kirjasta tai luentomonisteesta.

4. (a) Todista seuraava Borel-Cantelli lemman yleistys:

$$\begin{aligned} &\text{jos} \quad \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n | A_k^c \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c) = \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\text{siitä seuraa} \quad \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1 \end{aligned}$$

   jossa $A^c = (\Omega \setminus A)$ on komplenttijoukko ja $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ on ehdollinen todennäköisyys.

   (b) Näytä että toinen Borel-Cantelli lemma seuraa erikoistapauksena silloin kun tapahtumat $(A_n : n \in \mathbb{N})$ ovat $\mathbb{P}$-riippumattomia.

   Vihje Komplementti joukoille pätee,

$$\mathbb{P}(A_k^c \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_N^c) = \mathbb{P}(A_k^c) \prod_{n=k+1}^{N} \mathbb{P}(A_n^c | A_k^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c)$$

$$= (1 - \mathbb{P}(A_k)) \prod_{n=k+1}^{N} \Big(1 - \mathbb{P}(A_n | A_k^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c)\Big), \qquad 0 \le k < N$$

Käytä epäyhtälö $(1-x) \le \exp(-x), \quad \forall x \ge 0.$

R.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\Big) = \\
&\mathbb{P}(A_n^c)\mathbb{P}(A_{n+1}^c|A_n^c)\mathbb{P}(A_{n+1}^c|\ A_n^c \cap A_{n+1}^c)\dots\mathbb{P}(A_N^c|\ A_n^c \cap A_{n+1}^c \cap \dots \cap A_{N-1}^c) = \\
&(1-\mathbb{P}(A_n)) \prod_{k=n+1}^{N} \big(1-\mathbb{P}(A_k^c|\ A_n^c \cap A_{n+1}^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c)\big) \\
&\le \exp\Big(-\mathbb{P}(A_n) - \sum_{k=n+1}^{n} \mathbb{P}(A_k^c|\ A_n^c \cap A_{n+1}^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c)\Big)
\end{aligned}
$$

Koska tämä vähenee monotonisesti kun N, todennäköisyyden σ-additiivisuudesta seuraa

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\Big) \\
&\le \exp\Big(-\mathbb{P}(A_n) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c|\ A_n^c \cap A_{n+1}^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c)\Big) = \exp(-\infty) = 0
\end{aligned}
$$

σ-additiivisuudesta seuraa

$$
\mathbb{P}\Big(\liminf_n A_n^c\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big) = 0
$$

ja koska $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$, seuraa

$$
\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1 - \mathbb{P}(\liminf_n A_n^c) = 1
$$

Kun tapahtumat $(A_n : n \in \mathbb{N})$ ovat $\mathbb{P}$-riippumattomia, A_n on myös P-rippumaton komplementti tapahtumista $(A_k^c : k \ne n)$, ja

$$
\mathbb{P}(A_k|\ A_n^c \cap A_{n+1}^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c\ ) = \mathbb{P}(A_k).
$$

Silloin väite

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty \Longrightarrow \mathbb{P}\big(\limsup_k A_k\big) = 1
$$

on toisen Borel-Cantellin lemman tuttu versio.

5. Olkoon $(X_k(\omega) : k \in \mathbb{N})$ $\mathbb{P}$-riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_k) = 0$ ja $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_k^2) = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

   Olkoon $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$.

   (a) Osoita: $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_n^2) = n$ (käytä $\mathbb{P}$-riippumattomuutta), ja $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_n) = 0$.
   R. Odotusarvon lineaarisuudesta

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_i) = 0$$

   Myös

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_n^2) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big((X_1 + \cdots + X_n)^2\Big) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} X_i X_j\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_i X_j) = n$$

   jossa kun $i \neq j$, satunnaismuuttujen P-riippumuudesta seuraa

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_i X_j) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_i)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_j) = 0$$

   Itse asiassa satunnaismuuttujen heikompi parittainen $\mathbb{P}$-riippumattomuus on myös riittävä ehto.

   (b) Osoita:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ kun } n \to \infty$$

   eli stokastisen konvergenssin mielessä.
   Vihje Käytä Chebychevin epäyhtälö , sitä varten laskettiin ensin $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_n^2)$!
   R. Kun $\eta > 0.$, Chebychevin epäyhtälön avulla

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} > \eta\right) = \mathbb{P}\big(|S_n| > \eta n\big) = \mathbb{P}\big(|S_n|^2 > \eta^2 n^2\big)$$
$$\leq \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_n^2)}{\eta^2 n^2} = \frac{n}{\eta^2 n^2} = \frac{1}{\eta^2 n} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty$$

   joka tarkoittaa $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(c) Osoita että indeksi-alijonolle $(n^2 : n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{P}$-melkein varmasti

$$\frac{S_{n^2}(\omega)}{n^2} \longrightarrow 0 \text{ kun } n \to \infty$$

Vihje Käytä edelleen Chebychevin epäyhtälö ja Borel-Cantelli lemma (kumpi ?).

R. Aliindeksille n^2 seuraa

$$\mathbb{P}\biggl(\frac{|S_{n^2}|}{n^2} > \eta \biggr) \le \frac{1}{\eta^2 n^2}$$

Kaikille $n, M \in \mathbb{N}$ olkoon

$$A_n^M = \biggl\{ \omega : \frac{|S_{n^2}(\omega)|}{n^2} > \frac{1}{M} \biggr\}$$

Koska $\mathbb{P}(A_n^M) \le \frac{M^2}{n^2}$, kaikille $M \in \mathbb{N}$ saadaan suppeneva sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^M) \le M^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$$

ja ensimmäinen Borel Cantellin lemma astuu voimaan:

$$0 = \mathbb{P}\bigl(\limsup_n A_n^M\bigr) = \mathbb{P}\biggl(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \ge n} A_k^M \biggr) \quad \forall M \in \mathbb{N}$$

Koska P-nolla tapahtumien numeroituva yhdiste on P-nolla tapahtuma (seuraa todennäköisyyden ali-σ-additiivisuudesta)

$$\mathbb{P}\biggl(\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \ge n} A_k^M \biggr) = 0$$

joten komplementti-tapahtuma on P-melkein varma

$$\mathbb{P}\biggl(\bigcap_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \ge n} (A_k^M)^c \biggr) = 1$$

Mutta tämä tarkoittaa että P-melkein varmasti (eli kaikille ω $\mathbb{P}$-nolla mittaisen joukon ulkopuolelta)

$$\forall M \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad \frac{|S_{n^2}(\omega)|}{n^2} \le \frac{1}{M}, \quad \forall k \ge n,$$

eli P-melkein varmasti

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|S_{n^2}(\omega)|}{n^2} = 0$$