Todennäköisyyslaskennan kurssi, 10. harjoitus (5.–7.12.2012)

1. Olkoon $n \times n$-vakiomatriisi $\mathbf{M}$ ortogonaalinen, eli $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$. Oletetaan, että $\mathbf{U} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Määritellään $\mathbf{X} = \mathbf{M}\,\mathbf{U}$ ja $\mathbf{Y}$ siten, että $\mathbf{Y} = (X_1, \ldots, X_k)$, kun $k \le n$.

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ jakauma (tyyppi ja parametrit)?

b) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

c) Mikä on satunnaismuuttujan $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$ jakauma?

2. (Kaksiulotteisen normaalijakauman ehdollinen jakauma Choleskyn hajotelman avulla) Tarkastelemme vektoria (X, Y) joka noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on (μ_X, μ_Y) ja kovarianssimatriisi on $\mathbf{\Sigma}$. Edellisissä harjoituksissa johdettiin satunnaisvektorin (X, Y) kovarianssimatriisin

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\,\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\,\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

Choleskyn hajotelma ts. alakolmiomatriisi $\mathbf{A}$ siten, että $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T$. Jakson 10.2 perusteella pari (X, Y) voidaan esittää kaavalla

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}$$

jossa U_1 ja U_2 ovat riippumattomia ja noudattavat $N(0, 1)$-jakaumaa. Laske tähän tulokseen perustuen satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$, kun oletamme että $\sigma_X > 0$. (Opastus: esitä Y muodossa $g(X) + kU_2$. Koska $X \perp\!\!\!\perp U_2$ (miksi?), niin ehdolla $X = x$ sm:lla Y on jakauma $N(g(x), k^2)$.)

3. Kurssin *Johdatus tilastolliseen päättelyyn* osallistujilta kysyttiin keväällä 2012 (nimettömästi) ikä, pituus ja paino. Tarkastelemme tämän kyselyn tulosten perusteella muodostettua normaalijakaumamallia miespuolisten opiskelijoiden ominaisuuksille. Miesopiskelijan ikä A (vuosia), pituus L (cm) ja paino W (kg) mallinnetaan kolmiulotteisella normaalijakaumalla siten, että sv:lle $\mathbf{V} = (A, L, W)$

$$E\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 24 \\ 180 \\ 77 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{Cov} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 29 \\ 0 & 51 & 42 \\ 29 & 42 & 183 \end{bmatrix}$$

Moniulotteisen normaalijakauman ehdolliset jakaumat selviävät jaksosta 10.7.

a) Mikä on miesten painon (reuna-)jakauma?

b) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a)$. Mikä on 28 vuotta vanhojen miesten painon jakauma?

c) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a, L = l)$. Mikä on 28 vuotta vanhojen ja 175 cm pitkien miesten painon jakauma?

4. Selitä, miksi edellisen tehtävän normaalijakaumamallissa A ja L ovat riippumattomia. Ovatko ikä A ja pituus L ehdollisesti riippumattomia, jos paino W on tunnettu?

5. Olkoon $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \mathbf{\Sigma})$, jossa $\mathbf{\Sigma}$ on positiivisesti definiitti matriisi. Tällöin satunnaismuuttujalla $Y = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ on eräs tuttu jakauma. Mikä?

Opastus: käytä hajotelmaa $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, jossa $\mathbf{A}$ on $n \times n$-matriisi. Käytä lisäksi yleisen normaalijakauman määritelmää standardinormaalijakauman $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ avulla.

6. (Varianssin stabiloiva muunnos Poissonin jakaumalle) Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat Poissonin jakaumaa $\mathrm{Poi}(\mu)$, jossa $\mu > 0$.

a) Mikä on muuttujan $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ rajajakauma?

b) Mikä on muuttujan $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu))$ rajajakauma, kun $g(y) = 2\sqrt{y}$?