Todennäköisyyslaskennan kurssi, 8. harjoitus (21.–23.11.2012)

1. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista kumpikin noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$, jossa $\lambda > 0$ on vakio. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = X + Y, \qquad V = X - Y.$$

(Silmäile esimerkkiä 7.7 ennen kuin lähdet laskemaan tätä laskua.)

a) Johda satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio.

b) Johda satunnaismuuttujien U ja V reunatiheysfunktiot. (U:n jakauma on tuttu luvusta 5; V:llä on ns. Laplacen jakauma eli kaksitahoinen eksponenttijakauma).

2. Olkoot X ja Y riippumattomia gammajakautuneita satunnaismuuttujia siten, että

$$X \sim \mathrm{Gam}(\alpha, 1), \qquad Y \sim \mathrm{Gam}(\beta, 1),$$

jossa $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ ovat vakioita. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = \frac{X}{X+Y}, \qquad V = X + Y.$$

Johda lauseke yhteistiheysfunktiolle $f_{U,V}$, ja ilmoita johtamasi lausekkeen pätevyysalue. Johda sen jälkeen satunnaismuuttujan U (reuna)tiheysfunktio. (Vihje: U:lla on eräs beetajakauma.)

3. Jaksossa 7.9 kerrotaan, kuinka t-jakauman tiheysfunktio johdetaan muuttujanvaihtotekniikalla jakauman stokastisesta esityksestä. Tarkista, että t-jakauman tiheydeksi $f_Y(y)$ saadaan s. 99 annettu kaava, kun u integroidaan pois samalta sivulta löytyvästä ytf:sta $f_{U,Y}(u, y)$.

4. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x, y) = 8\,xy, \qquad 0 < x < y < 1$$

(ja nolla muualla).

a) Laske ehdollinen tiheys $y \mapsto f_{Y|X}(y \mid x)$, kun $0 < x < 1$.

b) Laske $m(x) = \int_x^1 y\, f_{Y|X}(y \mid x)\,\mathrm{d}y$, kun $0 < x < 1$. (Arvo $m(x)$ on nyt ehdollisen jakauman $Y \mid (X = x)$ odotusarvo eli ns. ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid X = x)$.)

5. Olkoot X ja Y riippumattomia Poissonin jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia siten, että $EX = \lambda > 0$ ja $EY = \mu > 0$. Olkoon $U = X + Y$. Johda satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma ehdolla $U = u$ (jossa $u \geq 0$ on kokonaisluku). Ehdollinen jakauma on binomijakauma, mutta mitkä ovat jakauman parametrit?

Opastus: U:n jakauman saat selville Poissonin jakauman yhteenlaskuominaisuuden avulla (ks. jakso 5.1.5). Laskeaksesi ehdollisen todennäköisyyden $P(X = x \mid U = u)$ tarvitset todennäköisyyden $P(X = x, X+Y = u)$, jonka saat laskettua suoraan tehtävänannon perusteella.

6. Tarkastellaan hierarkkisesti määriteltyä yhteisjakaumaa

$$\begin{aligned} X \mid (Y = y) &\sim \mathrm{Poi}(\lambda y) \\ Y &\sim \mathrm{Gam}(s, s), \end{aligned}$$

jossa $\lambda, s > 0$ ovat vakioita. Ts. yllä on kerrottu tekijät yhteisjakauman esityksessä

$$f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y)\, f_{X|Y}(x \mid y).$$

Nyt X:n jakauma on diskreetti ja Y:n jatkuva. Y:n tiheysfunktio, sekä X:n ehdollinen ptnf löytyvät kappaleesta 5.

Kirjoita yhteisjakauman tiheys, ja johda siitä X:n reunajakauman ptnf integroimalla. Tulokseksi tulee tietty negatiivinen binomijakauma (ks. jakso 5.1.4). Mitkä ovat sen parametrit?