Todennäköisyyslaskennan kurssi, 6. harjoitus (7.–9.11.2012)

1. Olkoon $X > 0$ sellainen satunnaismuuttuja, että odotusarvot EX, $E(1/X)$ ja $E\ln(X)$ ovat kaikki reaalilukuja. Mitä voit sanoa Jensenin epäyhtälön avulla

a) lukujen $1/EX$ ja $E(1/X)$ suuruusjärjestyksetä, ja

b) lukujen $\ln(EX)$ ja $E\ln(X)$ suuruusjärjestyksestä?

c) Laske edellä kerrotut neljä suuretta (tai niiden likiarvot), kun X:llä on välin $(1, 2)$ tasajakauma, ja tarkista tällä tavalla, että sait edellä järkeiltyä suuruusjärjestyksen oikein päin.

2. Olkoot $x_1, \dots, x_n$ aidosti positiivisia lukuja. Niiden aritmeettinen keskiarvo $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Tämän lisäksi tarkastelemme lukujen x_i geometrista keskiarvoa G ja ja harmonista keskiarvoa H, jotka määritellään kaavoilla

$$G = [x_1 x_2 \dots x_n]^{1/n}, \qquad H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Todista epäyhtälö

$$H \le G \le \bar{x}$$

seuraavien ohjeiden avulla. Määritellään diskreetti satunnaismuuttuja X siten, että se saa todennäköisyydellä $1/n$ arvokseen luvun x_i (kun $i = 1, \dots, n$). Määritellään lisäksi $Y = 1/X$. Tarkista, Jensenin epäyhtälön avulla, mitä voit sanoa arvojen $\ln(EX)$, $E\ln(X)$, $\ln(EY)$ ja $E\ln(Y)$ välisestä suuruusjärjestyksestä.

3. Olkoot $0 < r < s$ ja $E|X|^s < \infty$. Todista Hölderin epäyhtälön avulla Ljapunovin epäyhtälö

$$(E|X|^r)^{1/r} \le (E|X|^s)^{1/s}.$$

(Vihje: sovella Hölderin epäyhtälöä satunnaismuuttujien $|X|^r$ ja 1 tuloon ja valitse vielä eksponentit p ja q sopivasti.)

4. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f(x, y) = 2\,x, \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

Laske seuraavat todennäköisyydet,

a) $P(Y < X^2)$,

b) $P(Y^2 < X < Y)$.

5. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f(x, y) = c\,xy, \qquad 0 < x < y < 2$$

(ja $f(x, y)$ on nolla muuten). Laske vakion c arvo sekä reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y.

6. Olkoon parilla (X, Y) tasajakauma ympyrässä, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ja jonka halkaisija on yksi. Laske satunnaismuuttujan X reunajakauman tiheysfunktio, ja tunnista tätä kautta X:n reunajakauma. (Reunajakauma on eräs kappaleen 5 jakaumista.)