Todennäköisyyslaskennan kurssi, 4. harjoitus (3.–5.10.2012)

1. Alla annetaan tiettyjen diskreettien kokonaislukuarvoisten satunnaismuuttujien $1 \le X \le 2$ ja $1 \le Y \le 3$ yptnf $f(x, y)$ kahdessa eri tilanteessa. Tutki, ovatko X ja Y riippumattomia.

a) $f(x, y) = \frac{1}{5}$, kun $1 \le x \le 2$ ja $1 \le y \le 3$ ja $x \le y$,

b) $f(x, y) = \frac{1}{6}$, kun $1 \le x \le 2$ ja $1 \le y \le 3$.

2. Noppaa heitetään kaksi kertaa ja V_1 on ensimmäisen heiton silmäluku ja V_2 toisen heiton silmäluku. Määritellään

$$X = \min(V_1, V_2), \qquad Y = \max(V_1, V_2)$$

Perustele, miksi satunnaismuuttujien X ja Y yptnf on

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/36, & \text{kun } 1 \le x = y \le 6, \\ 2/36, & \text{kun } 1 \le x < y \le 6 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Johda reuna-ptnf:t f_X ja f_Y yptnf:n reunasummina. Laske arvot $f_{Y|X}(y \mid 2)$, kun $1 \le y \le 6$.

3. Noppaa heitetään kolme kertaa, ja V_i on silmäluku i:nnessä heitossa. Eri heittojen silmäluvut ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Olkoon Y silmäluvuista suurin, eli $Y = \max(V_1, V_2, V_3)$. Koska luonnollisessa perusjoukossa on nyt $6^3 = 216$ alkeistapausta, ei Y:n jakaumaa kannata yrittää johtaa tarkastelemalla kaikkia alkeistapauksia, vaan sen sijaan johdamme jakauman tähän tilanteeseen räätälöidyllä tavalla.

Aloita johtamalla Y:n kertymäfunktio (opastus: sen voi ilmaista yksinkertaisella kaavalla, jossa esiintyy yhden nopanheiton silmäluvun kertymäfunktio). Laske tämän jälkeen Y:n ptnf (opastus: kertymäfunktion hypyt!).

4. Kukin ihminen kuuluu ABO-veriryhmäjärjestelmässä täsmälleen yhteen neljästä veriryhmästä A, B, AB tai O. Suomessa eri veriryhmien esiintyvyydet ovat A 43 %, B 17 %, AB 8 % ja O 32 %. Suomen väestöstä otetaan kolmen henkilön satunnaisotos (takaisinpanolla). Laske todennäköisyys, että kaikilla kolmella poimituilla henkilöillä on eri veriryhmät ABO-järjestelmässä. (Opastus: multinomijakauma)

5. Noppaa heitetään kaksi kertaa ja silmäluvut ovat V_1 ja V_2. Kuten tehtävässä 2, määritellään $X = \min(V_1, V_2)$ ja $Y = \max(V_1, V_2)$. Laske EX ja EY.

6. (Vedonlyöntisuhde.) Sinä arvaat, että tietty tapahtuma A sattuu, ja ystäväsi tahtoo lyödä asiasta vetoa kanssasi. Ystäväsi pistää vetoon summan s ja sinä summan $k \cdot s$. Jos A sattuu, sinä voitat koko summan $(1 + k)s$ ja ystäväsi ei saa mitään. Jos A ei satu, niin ystäväsi voittaa koko summan ja sinä et saa mitään. Todennäköisyys $0 < p = P(A) < 1$ on tunnettu.

Miten k pitää valita, jotta veto olisi reilu? (Veto on reilu, jos kumpikaan pelaaja ei [odotusarvon mielessä] keskimäärin voita eikä häviä vedossa.)

Huom. Ratkaisuna saatavaa lukua k sanotaan vedonlyöntisuhteeksi (tapahtuman A puolesta), engl. *odds (in favour of A)*.