Todennäköisyyslaskennan kurssi, 3. harjoitus (26.–28.9.2012)

1. Olkoon $\alpha > 0$. Määritellään jatkuva jakauma, jonka tf on $f(x) = k \cdot h(x)$, jossa normalisoimaton tiheysfunktio h on

$$h(x) = x^{\alpha-1}, \quad \text{kun } 0 < x < 1,$$

ja nolla muualla.

(a) Laske vakion k arvo, (b) johda jakauman kertymäfunktio, (c) johda jakauman kvantiilifunktio.

2. (Kriittisiä pisteitä kvantiilifunktion avulla.) Olkoon Y jatkuvasti jakautunut sm, joka toteuttaa jakson 2.8 alussa mainitut oletukset, jolloin sen kvantiilifunktio q on kertymäfunktion tavanomainen käänteisfunktio. Oletetaan, että kvantiilifunktion q arvot osataan laskea. Annettuna on luku $0 < \alpha < 1$.

a) Etsi pisteet y_1 ja y_2 siten, että $P(Y < y_1) = P(Y > y_2) = \frac{1}{2}\alpha$. (Tällaisia pisteitä käytetään luottamusvälien sekä kaksisuuntaisten testien yhteydessä.)

b) Mikä yhteys on pisteiden y_1 ja y_2 välillä, jos Y:n jakauma on symmetrinen eli sen tiheysfunktio toteuttaa ehdon $f(-y) = f(y)$ kaikilla y?

3. Olkoon $X > 0$ jatkuvasti jakautunut sm, jonka tf $f_X(x)$ on jatkuva ja aidosti positiivinen, kun $x > 0$. Olkoon q_X sm:n X kvantiilifunktio.

a) Osoita, että sm:n $Y = \ln X$ kertymäfunktio on $F_Y(y) = F_X(e^y)$. Johda Y:n tiheysfunktio derivoimalla sen kf. Lausu $q_Y(u)$ eli Y:n kvantiilifunktion arvo pisteessä $0 < u < 1$ funktion q_X avulla.

b) Osoita, että sm:n $Z = -\ln X$ kertymäfunktio on $F_Z(z) = 1 - F_X(e^{-z})$. Johda Z:n tiheysfunktio derivoimalla sen kf. Lausu $q_Z(u)$ eli Z:n kvantiilifunktion arvo pisteessä $0 < u < 1$ funktion q_X avulla.

4. Johda edellisen tehtävän satunnaismuuttujien Y ja Z tiheysfunktiot muuttujanvaihtotekniikalla (sovella lausetta 2.12 tai muistisääntöä (2.7)).

5. Olkoon $a > 0$ ja olkoon X:llä sellainen jakauma, jonka kertymäfunktio on

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - x^{-a}, & \text{kun } x > 1, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritellään $Y = e^{-X}$. Laske Y:n jakauman tiheysfunktio f_Y.

6. (Testin p-arvon jakauma.) Tarkastelemme sellaista tilastollista testaustilannetta, jossa suuret testisuureen Z arvot antavat näyttöä nollahypoteesia H_0 vastaan. Tällaisen testin p-arvo määritellään kaavalla

$$p\text{-arvo} = P(Z_0 \geq z_{\text{obs}}) = 1 - F_0(z_{\text{obs}}),$$

jossa z_{obs} on testisuureen saama arvo käsillä olevassa aineistossa, F_0 on testisuureen kertymäfunktio nollahypoteesin mukaisessa populaatiossa, ja Z_0 on sm, jolla on kf F_0. Oletamme, että Z_0:lla on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla f_0 ja kvantiilifunktiolla q_0. (Kuten jakson 2.8 alussa, oletamme että f_0 on aidosti positiivinen jollakin välillä (a, b) ja nolla sen ulkopuolella, ja lisäksi oletamme, että f_0 on jatkuva funktio välillä (a, b).)

Tarkastelemme p-arvoa vastaavan satunnaismuuttujan U jakaumaa, jossa

$$U = 1 - F_0(Z_1),$$

ja Z_1 tarkoittaa satunnaismuuttujaa, jolla on (vaihtoehtohypoteesin mukainen) jatkuva jakauma kf:lla F_1 ja tf:lla f_1, joka on nolla välin (a, b) ulkopuolella.

Laske U:n kf ja tf. Mitä tuttua jakaumaa U noudattaa, jos $F_1 = F_0$?