Todennäköisyyslaskennan kurssi, 2. harjoitus (19.–21.9.2012)

1. *Taustaa:* V. 2010 jalkapallon MM-kisojen aikana meritursas Paul ennusti oikein kaikkien seitsemän Saksan ottelun voittajan sekä sen jälkeen ennusti oikein kisojen loppuottelun voittajan. Ottelun lopputuloksen ennustaminen tapahtui siten, että Paulin akvaarioon asetettiin kaksi ruokalaatikkoa, joissa oli ottelussa pelaavien maiden liput. Laatikko jonka Paul ensiksi aukaisi, katsottiin olevan Paulin ennustama voittajajoukkue. Pyrimme tässä tehtävässä saamaan valaistusta siihen kysymykseen, oliko Paulin ennustus osoitus selvänäöstä, vai voitaisiinko tulos selittää yhteensattuman ja valikoivan uutisoinnin avulla.

Sensaatiolehti järjestää kokeen, jonka alussa lanttia heitetään kahdeksan kertaa, ja tuloksena saatu kruunujen ja klaavojen jono pitää yrittää ennustaa. Tämän jälkeen k henkilöä heittää kukin lanttia kahdeksan kertaa. Henkilö i ennustaa jonon oikein, jos hän saa saman kruunujen ja klaavojen jonon, kuin mikä piti ennustaa. Mikäli ainakin yksi k henkilöstä ennustaa oikein, tämä henkilö tai nämä henkilöt saavat nimensä ja kuvansa seuraavaan lehden numeroon — kokeen tekniset yksityiskohdat (kuten se että ennustamista yrittää useampi henkilö) eivät tämän lehden lukijoita kiinnosta, joten niitä ei mainita.

Laske kolmella desimaalilla arvo todennäköisyydelle, että ainakin yksi k:sta henkilöistä ennustaa jonon oikein seuraavilla kokeeseen osallistuvien henkilöiden lukumäärillä: $k = 1$, $k = 10$, $k = 100$ ja $k = 500$.

2. Tarkastelemme kahden nopan heittoa. Olkoon X_1 ensimmäisen nopan silmäluku, ja X_2 toisen nopan silmäluku. Olkoon Y silmäluvuista suurin, ts. $Y = \max(X_1, X_2)$. Johda satunnaismuuttujan Y pistetodennäköisyysfunktio.

3. Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^2, & \text{kun } 0 < x < 3, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritä vakion c arvo, ja johda kaava jakauman kertymäfunktiolle.

4. Olkoon X satunnaismuuttuja, ja määritellään satunnaismuuttuja Y siten, että $Y = \mathrm{e}^X$ (ts. $Y(\omega) = \mathrm{e}^{X(\omega)}$ kaikilla ω). Ilmaise Y:n kertymäfunktio X:n kertymäfunktion avulla.

5. Määritellään funktio f kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{kun } -2 < x < -1, \\ \frac{1}{10}\frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{kun } -1 < x < \frac{9}{4} \text{ ja } x \neq 0, \\ \frac{3}{10}\exp(-x + \frac{9}{4}) & \text{kun } x > \frac{9}{4}, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

a) Tarkista, että f on tiheysfunktio, ja hahmottele sen kuvaaja.

b) Olkoon satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f. Laske $P(-\dfrac{3}{2} < X < 1)$.

6. Tarkista lauseen 2.7 avulla, että funktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < -1, \\ \frac{1}{8}(x+1)^2, & \text{kun } -1 \le x < 0, \\ 1 - \frac{7}{8}(1-x)^2, & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{kun } x \ge 1 \end{cases}$$

on jatkuvan jakauman kertymäfunktio. Laske jakauman tiheysfunktio sekä piirrä tiheysfunktion kuvaaja.