9 Moniulotteinen jakauma

- Moniulotteisella satunnaisvektorilla voi olla useampi kuin kaksi komponenttia.
- Sen jakaumaa kuvaillaan samaan tapaan kuin kaksiulotteisen satunnaisvektorin jakaumaa.
- Suurin osa tämän luvun ideoista on ennestään tuttuja, eikä tuttuja tuloksia enää perustella uudestaan.
- Tilastotieteilijä tarvitsee moniulotteisia jakaumia sen takia, että hän voisi määritellä ja analysoida tilastollisia malleja.

Moniulotteisuudesta johtuvia uusia asioita

- Reunajakauma voidaan määritellä mille tahansa komponenttien osajoukolle.
- Ehdollisia jakaumia voidaan laskea ehdollistamalla millä tahansa komponenttien osajoukolla.
- Ehdollinen riippumattomuus on käsite, joka ei ole mielekäs kuin vasta dimensioissa kolmesta eteenpäin.
- Moniulotteisten jakaumien havainnollistaminen on hankalaa. Kuvien piirtäminen ei onnistu korkeissa dimensioissa, vaan niiden sijasta pitää luottaa kaavojen manipulointiin.

9.1 Satunnaisvektori

- Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat samalla perusjoukolla Ω määriteltyjä satunnaismuuttujia, niin $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ on n-ulotteinen satunnaisvektori (lyh. sv).
- Ts. satunnaisvektori on kuvaus $\Omega \to \mathbb{R}^n$ siten, että

$$\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{bmatrix}$$

Diskreetisti jakautunut satunnaisvektori

- Jos kaikki satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ komponentit X_i ovat diskreettejä sm:ia, niin sen ptnf eli sm:ien X_i yhteispistetodennäköisyysfunktio (yptnf) on

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n). \qquad (1)$$

- Jos $g(\mathbf{X})$ on sv:n $\mathbf{X}$ reaaliarvoinen muunnos, niin sen odotusarvo saadaan kaavalla (tiedostamattoman tilastotieteilijän laki diskreetissä tapauksessa).

$$Eg(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \qquad (2)$$

mikäli kyseinen summa suppenee itseisesti

Jatkuvasti jakautunut satunnaisvektori

- Satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ on jatkuva jakauma, mikäli sillä on tiheysfunktio $f_{\mathbf{X}}$.
- Tämä tarkoittaa sitä, että

$$P(\mathbf{X} \in B) = \int_B f_{\mathbf{X}} = \int_B f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \text{kaikilla } B \subset \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

- Tällöin sen komponenteilla $X_1, \ldots, X_n$ on jatkuva yhteisjakauma, ja tiheysfunktiota

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

kutsutaan sm:ien $X_1, \ldots, X_n$ yhteistiheysfunktioksi.

Kuinka *n*-kertainen integraali lasketaan

Edellä kyseessä on *n*-kertainen integraali,

$$\int_B f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int \cdots \int 1_B(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

joka voidaan laskea iteroituna integraalina käyttämällä mielivaltaista integrointijärjestystä.

Tiedostamattoman tilastotieteilijän laki jatkuvassa tapauksessa

- Jos $g(\mathbf{X})$ on sv sv:n $\mathbf{X}$ reaaliarvoinen muunnos, niin sen odotusarvo saadaan kaavalla

$$Eg(\mathbf{X}) = \int g(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{4}$$

  mikäli kyseinen integraali suppenee itseisesti.
- Tämä integraali voidaan laskea iteroituna integraalina käyttäen mielivaltaista integrointijärjestystä.
- Kun integrointijoukkoa ei merkitä näkyviin, tarkoitetaan koko avaruuden (tässä $\mathbb{R}^n$) yli laskettua integraalia.
- Jos dimensio $n \geq 2$, niin tämä merkintä ei sekaannu määrämättömän integraalin (engl. *indefinite integral*) merkinnän kanssa, sillä määräämättömän integraalin käsitettä käytetään vain dimensiossa yksi.

Ytf:n ja ykf:n välinen yhteys

- Jatkuvan (yhteis)jakauman tapauksessa ykf on

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{s_1=-\infty}^{x_1} \cdots \int_{s_n=-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(s_1, \ldots, s_n) \, \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_n.$$

- Kun tätä funktiota derivoidaan osittain jokaisen argumenttinsa suhteen, nähdään että

$$\frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n),$$

  ainakin niissä pisteissä $(x_1, \ldots, x_n)$, joissa $f_{\mathbf{X}}$ on jatkuva.
- Voidaan osoittaa, että tämä funktio kelpaa jatkuvasti jakautuneen sv:n tiheysfunktioksi (kun se jatketaan mielivaltaisesti niissä pisteissä, joissa ko. derivaatta ei ole olemassa).

Diskreetin ja jatkuvan sv:n yhteisjakauma

- Jos $\mathbf{X}$ on diskreetti sv, ja $\mathbf{Y}$ on jatkuvasti jakautunut sv, ja ne on määritelty samalla perusjoukolla Ω, niin silloin niiden yhteisjakauma voidaan esittää funktiolla

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}),$$

  jossa $f_{\mathbf{X}}$ on sv:n $\mathbf{X}$ reunajakauman (yhteis-)ptnf, ja $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})$ on sv:n $\mathbf{Y}$ ehdollinen (yhteis-)tf ehdolla $\mathbf{X} = \mathbf{x}$.

- Jos $g(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ on reaaliarvoinen sm, niin sen odotusarvo saadaan kaavalla

$$Eg(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{x}} \int g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}, \tag{5}$$

  mikäli kyseinen odotusarvo on olemassa.

9.2 Odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi

Asetamme seuraavat määritelmät, mikäli kyseessä olevat odotusarvot ovat olemassa.

- Satunnaisvektorin $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ odotusarvo tai odotusarvovektori on n-komponenttinen vakiovektori

$$EX = E(\mathbf{X}) = (EX_1, \dots, EX_n) = \begin{bmatrix} EX_1 \\ \vdots \\ EX_n \end{bmatrix}.$$

Satunnaismatriisin odotusarvo

- Dimensioltaan $m \times n$ olevan satunnaismatriisin $\mathbf{Z} = [Z_{ij}]$ odotusarvo tai odotusarvomatriisi on se $m \times n$-vakiomatriisi, jonka alkio (i, j) on alkion Z_{ij} odotusarvo, ts.

$$E\mathbf{Z} = E\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EZ_{11} & EZ_{12} & \dots & EZ_{1n} \\ EZ_{21} & EZ_{22} & \dots & EZ_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ EZ_{m1} & EZ_{m2} & \dots & EZ_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kahden satunnaisvektorin kovarianssi

- Satunnaisvektorien $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ja $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_k)$ (välinen) kovarianssi on $n \times k$-matriisi

$$\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E[(\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{Y} - E\mathbf{Y})^T]$$
$$= \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(X_1, Y_1) & \operatorname{cov}(X_1, Y_2) & \dots & \operatorname{cov}(X_1, Y_k) \\ \operatorname{cov}(X_2, Y_1) & \operatorname{cov}(X_2, Y_2) & \dots & \operatorname{cov}(X_2, Y_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_n, Y_1) & \operatorname{cov}(X_n, Y_2) & \dots & \operatorname{cov}(X_n, Y_k) \end{bmatrix}.$$

- $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ on matriisi, joka sisältää kaikkien parien (X_i, Y_j) kovarianssit $\operatorname{cov}(X_i, Y_j)$.
- Mikäli $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$, niin sanotaan, että satunnaisvektorit $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ *eivät korreloi* eli että ne ovat *korreloimattomat* (engl. *uncorrelated*).

Satunnaisvektorin kovarianssimatriisi

- Satunnaisvektorin $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ kovarianssimatriisi on $n \times n$-matriisi

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = E[(\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{X} - E\mathbf{X})^T]$$
$$= \begin{bmatrix} \mathrm{cov}(X_1, X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \ldots & \mathrm{cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & \mathrm{cov}(X_2, X_2) & \ldots & \mathrm{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_n, X_1) & \mathrm{cov}(X_n, X_2) & \ldots & \mathrm{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}.$$

- Satunnaisvektorin kovarianssimatriisi on symmetrinen ja sen päälävistäjällä on komponenttisatunnaismuuttujien varianssit.
- Näissä merkinnöissä $\mathrm{Cov}()$ on yhden argumentin funktio, ja $\mathrm{cov}(,)$ on kahden argumentin funktio.

Laskusääntöjä odotusarvolle

- Määritelmästä seuraa suoraan, että

$$E(\mathbf{Z}^T) = (E\mathbf{Z})^T. \tag{6}$$

- Laskusääntö

$$E[\mathbf{AZB} + \mathbf{C}] = \mathbf{A}(E\mathbf{Z})\mathbf{B} + \mathbf{C}, \tag{7}$$

  on voimassa kun $\mathbf{Z}$ on satunnaismatriisi ja $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ ovat vakiomatriiseja, joiden dimensiot ovat sellaiset, että lauseke on määritelty.

- Ts. vakiomatriisit saadaan vetää ulos odotusarvosta, jos ne sijaitsevat matriisitulossa äärimmäisenä vasemmalla tai äärimmäisenä oikealla.

Riippumattomuus

- Mikäli $\mathbf{Y}$ ja $\mathbf{Z}$ ovat satunnaisvektoreita, ja $\mathbf{G}(\mathbf{Y})$ ja $\mathbf{H}(\mathbf{Z})$ ovat matriisiarvoisia lausekkeita, niin

$$\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \perp\!\!\!\perp \mathbf{H}(\mathbf{Z}). \tag{8}$$

- Matriisilausekkeiden riippumattomuus tarkoittaa sitä, että kaikki matriisin $\mathbf{G}(\mathbf{Y})$ komponentit ovat riippumattomia kaikista matriisin $\mathbf{H}(\mathbf{Z})$ komponenteista.
- Riippumattomien satunnaisvektorien funktiot ovat keskenään riippumattomia.
- Koska tämä asia pätee matrisiarvoisille funktioille, se pätee tietenkin myös vektori- tai skalaariarvoisille funktioille.

Riippumattomien satunnaismatriisien tulon odotusarvo

Riippumattomuudesta ja matriisikertolaskun määritelmästä seuraa, että

$$\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad E[\mathbf{G}(\mathbf{Y})\,\mathbf{H}(\mathbf{Z})] = E[\mathbf{G}(\mathbf{Y})]\,E[\mathbf{H}(\mathbf{Z})] \tag{9}$$

mikäli dimensiot ovat matriisitulossa $\mathbf{G}(\mathbf{Y})\,\mathbf{H}(\mathbf{Z})$ yhteensopivat ja mikäli odotusarvot ovat olemassa.

Kahden satunnaisvektorin kovarianssin ominaisuuksia

- Jos $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$, ja $\mathbf{X}$ on m-komponenttinen ja $\mathbf{Y}$ on n-komponenttinen, niin

$$\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}_{m \times n}.$$

- Sv:ien $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ kovarianssi voidaan laskea myös kaavalla

$$\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E[\mathbf{X}\mathbf{Y}^T] - (E\mathbf{X})(E\mathbf{Y})^T.$$

- Jos $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ on vakiovektori, ja $\mathbf{X}$ on n-komponenttinen sv, niin

$$\operatorname{cov}(\mathbf{v}, \mathbf{X}) = \mathbf{0}_{m \times n}, \qquad \operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}_{n \times m}.$$

- $\mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})^T$.
- Jos $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ja $\mathbf{Y}$ ovat satunnaisvektoreita, niin

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) &= \mathrm{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}) + \mathrm{cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}), \\
\mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) &= \mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_1) + \mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_2).
\end{aligned}$$

- Jos $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat vakiomatriiseja ja $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat vakiovektoreja, niin

$$\mathrm{cov}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{v}, \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{w}) = \mathbf{A}\,\mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\,\mathbf{B}^T. \tag{10}$$

Erityisesti

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X})\mathbf{A}^T. \tag{11}$$

Esimerkki: summan kovarianssimatriisi

- Jos satunnaisvektorit $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ ovat samanpituisia, niin

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) &= \mathrm{cov}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}, \mathbf{X}+\mathbf{Y}) \\
&= \mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}+\mathbf{Y}) + \mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}+\mathbf{Y}) \\
&= \mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + \mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \\
&= \mathrm{Cov}(\mathbf{X}) + \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}) + \mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}).
\end{aligned}
$$

- Jos $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ eivät korreloi, niin $\mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$ ja $\mathrm{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \mathbf{0}$.
- Korreloimattomille satunnaisvektoreille summan kovarianssimatriisi on summattavien satunnaisvektoreiden kovarianssimatriisien summa. Tämä pitää erityisesti paikkansa riippumattomille satunnaisvektoreille.

Neliömatriisin mahdollisia ominaisuuksia

Neliömatriisi $\mathbf{B}$ on

- säännöllinen eli kääntyvä eli ei-singulaarinen, jos sillä on olemassa käänteismatriisi $\mathbf{B}^{-1}$;
- symmetrinen, jos $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$;
- positiivisesti semidefiniitti, jos $\mathbf{v}^T\mathbf{B}\mathbf{v} \geq 0$ kaikilla $\mathbf{v}$;
- positiivisesti definiitti, jos $\mathbf{v}^T\mathbf{B}\mathbf{v} > 0$ kaikilla $\mathbf{v} \neq 0$.

Definiittisyys ja ominaisarvot

- On olemssa matriiseja, joiden kaikki alkiot ovat positiivisia, mutta jotka eivät ole positiivisesti semidefiniittejä, kuten esim.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Valitsemalla $\mathbf{v} = (-1, 1)$ saadaan $\mathbf{v}^T B \mathbf{v} = -2$.
- Definittisyyden voi käsittää helposti ominaisarvojen etumerkkien avulla (mikäli ominaisarvot ovat tuttu käsite):
  - Symmetrinen matriisi **B** on positiivisesti semidefiniitti jos ja vain jos kaikki sen ominaisarvot ovat suurempia tai yhtä kuin nolla.
  - Symmetrinen matriisi **B** on positiivisesti definiitti jos ja vain jos kaikki sen ominaisarvot ovat aidosti suurempia kuin nolla.

Satunnaisvektorin kovarianssimatriisin definiittisyys

Lause

- Sv:n $\mathbf{X}$ kovarianssimatriisi on symmetrinen ja positiivisesti semidefiniitti matriisi.
- Jos se ei ole positiivisesti definiitti, niin sv:n $\mathbf{X}$ komponenttien välillä on lineaarisia sidosehtoja, eli $\mathbf{X}$ saa todennäköisyydellä yksi arvoja vain tietyltä kiinteältä hypertasolta.

- *Seuraus:* Jos $\mathrm{Cov}\,\mathbf{X}$ ei ole positiivisesti definiitti, niin $\mathbf{X}$:llä ei voi olla jatkuva jakauma, sillä hypertaso on alempiulotteisena pintana nollamittainen.
- Huomaa analogia satunnaismuuttujan Z varianssin $\mathrm{var}(Z)$ ominaisuuksien kanssa.

Todistus

- Kovarianssimatriisin symmetrisyys seuraa sen määritelmästä.
- Positiivinen semidefiniittisyys seuraa siitä, että

  $$\begin{aligned}\mathbf{v}^T \operatorname{Cov}(\mathbf{X})\mathbf{v} &= \mathbf{v}^T E[(\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{X} - E\mathbf{X})^T]\,\mathbf{v} \\ &= E[\mathbf{v}^T(\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{X} - E\mathbf{X})^T\mathbf{v}] = E\left[\left(\mathbf{v}^T(\mathbf{X} - E\mathbf{X})\right)^2\right] \geq 0,\end{aligned}$$

  sillä ei-negatiivisen sm:n odotusarvo on ei-negatiivinen.
- Jos kovarianssimatriisi ei ole positiivisesti definiitti, niin on olemassa $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siten, että

  $$0 = \mathbf{v}^T \operatorname{Cov}(\mathbf{X})\,\mathbf{v} = E\left[\left(\mathbf{v}^T(\mathbf{X} - E\mathbf{X})\right)^2\right],$$

  joten todennäköisyydellä yksi on

  $$\mathbf{v}^T(\mathbf{X} - E\mathbf{X}) = 0.$$

9.3 Ehdolliset jakaumat, kertolaskusääntö ja ehdollinen odotusarvo

- Tarkastellaan sv:ia $\mathbf{Z}$, jonka r ensimmäistä koordinaattia muodostavat sv:n $\mathbf{X}$ ja loput s koordinaattia sv:n $\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s).$$

- Ehdolliset jakaumat $\mathbf{Y} \mid (\mathbf{X} = \mathbf{x})$ ja $\mathbf{X} \mid (\mathbf{Y} = \mathbf{y})$ hallitaan tutuilla kaavoilla:

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}) = \frac{f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}, \qquad f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}.$$

- Miten reunajakaumien tiheydet lasketaan? Pitääkö kaikkien komponenttien olla joko disreettejä tai jatkuvia?

Diskreettejä vai jatkuvia komponentteja?

- Oletamme, että sv:n $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ yhteisjakauman esittää tiheys

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

- Sallimme sen tilanteen, että jotkut $\mathbf{Z}$:n koordinaatit ovat diskreettejä sm:ia ja lopuilla on jatkuva yhteisjakauma.

Marginalisointi: yhteisjakaumasta reunajakaumaan

- Osavektorin $\mathbf{X}$:n reunajakauman esittää tiheys $f_{\mathbf{X}}$, joka saadaan summaamalla pois tiheydestä $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}$ sv:n $\mathbf{Y}$ diskreetit komponentit ja integroimalla pois sen jatkuvat komponentit.
- Merkintöjä väärinkäyttämällä,

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}, \tag{12}$$

  missä integraalimerkki tarkoittaa summaamista diskreettien komponenttien kohdalla.
- $\mathbf{X}$:n jakauma saadaan marginalisoimalla yhteisjakaumasta.
- Vastaavasti $f_{\mathbf{Y}}$ saadaan kaavalla

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Marginalisointi, kun komponentit ovat hujan hajan vektorissa $\mathbf{Z}$

- Edellä marginalisoitiin satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ yhteisjakaumasta joko ensimmäisten komponenttien $\mathbf{X}$ tai viimeisten komponenttien $\mathbf{Y}$ reunajakauma.
- Se tilanne, missä pitää reunajakauma pitää etsiä mielivaltaiselle osajoukolle $\mathbf{Z}$:n komponentteja saadaan palautettua edelliseen tilanteeseen permutoimalla koordinaatteja.
- Menettely selviää esimerkistä.

Esimerkki kahden muuttujan reunajakauman laskemisesta nejän muuttujan yhteisjakaumasta

- Olkoot U ja V diskreettejä sm:ia ja (X, Y) jatkuvasti jakautunut sv. Yhteisjakauman esittää tiheys

$$f_{U,V,X,Y}(u, v, x, y)$$

- Etsitään komponenttien V ja Y reunajakauma (ts. niiden yhteisjakauma).
- Jotta päästäisiin soveltamaan em. kaavoja, permutoidaan V ja Y ensimmäisiksi

$$f_{V,Y,U,X}(v, y, u, x) = f_{U,V,X,Y}(u, v, x, y),$$

(kaikilla kyseeseen tulevilla arvoilla u, v, x, y).
- Tämän jäkeen vektori (U, V) on ensimmäisenä, joten

$$f_{V,Y}(v, y) = \sum_u \int f_{V,Y,U,X}(v, y, u, x)\,\mathrm{d}x.$$

Esimerkki jatkuu

- Nyt muistetaan, että $f_{V,Y,U,X}(v, y, u, x)$ on sama asia kuin $f_{U,V,X,Y}(u, v, x, y)$.
- Siispä sm:ien V ja Y yhteisjakauman esittää tiheys

$$f_{V,Y}(v, y) = \sum_{u} \int f_{U,V,X,Y}(u, v, x, y) \, \mathrm{d}x,$$

- Käytännön laskuissa siirryttäisiin suoraan viimeiseen vaiheeseen ilman välissä esitettyjä permutointivälivaiheita.
- Diskreetit komponentit yksinkertaisesti marginalisoidaan pois summaamalla ja jatkuvat komponentit integroimalla.

Kertolaskusääntö

- Kertolaskusääntö (eli ketjusääntö) on voimassa, eli

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}) = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})\, f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}).$$

- Kertolaskusääntöä voidaan iteroida. Oletetaan, että sv $\mathbf{X} = (\mathbf{U},\mathbf{V})$. Tällöin

$$f_{\mathbf{U},\mathbf{V}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})\, f_{\mathbf{V}|\mathbf{U}}(\mathbf{v} \mid \mathbf{u}),$$

  minkä takia

$$f_{\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})\, f_{\mathbf{V}|\mathbf{U}}(\mathbf{v} \mid \mathbf{u})\, f_{\mathbf{Y}|\mathbf{U},\mathbf{V}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Lisää kertolaskusäännöstä

- Kertolaskusäännön soveltamista voidaan jatkaa, kunnes ollaan päästy skalaarikomponentteihin asti.
- Esimerkiksi neljän sm:n U, V, X, Y tiheys voidaan esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
&f_{U,V,X,Y}(u,v,x,y) = \\
&\qquad f_U(u)\, f_{V\mid U}(v \mid u)\, f_{X\mid U,V}(x \mid u,v)\, f_{Y\mid X,U,V}(y \mid x,u,v).
\end{aligned}
$$

- Kertolaskusääntöä voidaan soveltaa yhtä hyvin käyttämällä jotakin muuta sm:ien permutaatiota.

Kertolaskusääntö pätee myös ehdollisille jakaumille

- Esim.

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{U},\mathbf{V}|\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{v} \mid \mathbf{y}) &= \frac{f_{\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} = \frac{f_{\mathbf{U},\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \, \frac{f_{\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y})}{f_{\mathbf{U},\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{y})} \\ &= f_{\mathbf{U}|\mathbf{Y}}(\mathbf{u} \mid \mathbf{y}) \, f_{\mathbf{V}|\mathbf{U},\mathbf{Y}}(\mathbf{v} \mid \mathbf{u},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

- Ensimmäinen tekijä on komponentin $\mathbf{U}$ reunajakauma ehdollisessa yhteisjakaumassa (ehtona $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$) ja toisena tekijänä komponentin $\mathbf{V}$ ehdollinen jakauma ehdolla $\mathbf{U} = \mathbf{u}$ (kun edelleen ehdollistetaan arvolla $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$).

Marginalisointi ehdollisesta yhteisjakaumasta

- Ehdollisen jakauman reunajakauman voi laskea marginalisoimalla tuttuun tapaan ehdollista yhteisjakaumaa.
- Esim.

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{U}|\mathbf{Y}}(\mathbf{u} \mid \mathbf{y}) &= \frac{f_{\mathbf{U},\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} = \frac{1}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \int f_{\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{v} \\
&= \int f_{\mathbf{U},\mathbf{V}|\mathbf{Y}}(\mathbf{u},\mathbf{v} \mid \mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{v}.
\end{aligned}
$$

Merkintöjä mielellään yksinkertaistetaan

- Kun jakaumien välisiä yhteyksiä johdetaan tähän tapaan kertolaskukaavan ja marginalisoinnin kautta, niin tiheysfunktioiden alaindeksit jätetään usein kirjoittamatta, koska ne selviävät tiheysfunktion argumenteista.
- Muussa tapauksessa kaikki argumentit joudutaan kirjoittamaan kahteen kertaan: alaindekseissä esiintyvät satunnaismuuttujat (tai -vektorit) ja funktion argumentteina niiden mahdolliset arvot.
- Tämä merkintöjen väärinkäyttö ei johda sekaannukseen, kunhan pidetään mielessä, että esim. $f(x)$, $f(y)$, $f(x \mid y)$ ja $f(y \mid x)$ ovat tyypillisesti kaikki eri funktioita.

Ehdollistaminen satunnaisvektorin kiinteällä arvolla

- Satunnaisvektorin $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ehdollinen odotusarvo(vektori) ehdolla $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ määritellään siten, että se on satunnaisvektorin $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$ odotusarvovektori, kun $\mathbf{Y}$:n jakaumana käytetään ehdollista jakaumaa $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{x})$.
- Merkintöjä väärinkäyttämällä

$$E(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

- Tässä integraalimerkki voi tarkoittaa summausta joidenkin vektorin $\mathbf{y}$ komponenttien suhteen.

Ehdollistaminen satunnaisvektorilla

- Jos ehdollistetaan satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$, niin satunnaisvektori $E(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X})$ määritellään niin, että se on $\mathbf{m}(\mathbf{X})$, kun

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}),$$

- Edellä funktion $\mathbf{m}$ määritelmä jatketaan tarvittaessa nollavektoriksi niillä argumentin arvoilla, jolla se ei luonnostaan ole määritelty.

Ehdollinen kovarianssimatriisi

- Satunnaisvektorin $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ehdollinen kovarianssimatriisi ehdolla $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ määritellään satunnaisvektorin $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$ kovarianssimatriisina, kun $\mathbf{Y}$:n jakaumana käytetään ehdollista jakaumaa $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{x})$.
- Voidaan käyttää merkintää

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}).$$

- Jos ehdollistetaan satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$, niin ehdollinen kovarianssimatriisi on satunnaismatriisi, ja sitä merkitään

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X}).$$

9.4 Ehdollinen riippumattomuus

- Palautetaan mieleen, mitä (ei-ehdollinen) riippumattomuus tarkoittaa.
- Satunnaisvektorit $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ ovat riippumattomia, jos

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}).$$

  kaikilla argumenteilla $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.
- Vastaavasti satunnaisvektorit $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ ovat riippumattomia, jos

$$f_{\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) \cdots f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{x}_n)$$

  kaikilla argumenteilla.

Ehdollinen riippumattomuus

Määritelmä

Satunnaisvektorit $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ ovat riippumattomia ehdolla $\mathbf{Z}$ (mikä voidaan merkitä $(\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}) \mid \mathbf{Z}$), jos ne ovat riippumattomia niiden ehdollisessa yhteisjakaumassa ehdolla $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ kaikilla $\mathbf{z}$, ts. mikäli

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} \mid \mathbf{z}) = f_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})\, f_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{z}), \qquad \text{kaikilla } \mathbf{x},\ \mathbf{y} \text{ ja } \mathbf{z} \tag{13}$$

Vastaavasti, satunnaisvektorit $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ ovat riippumattomia ehdolla $\mathbf{Z}$, mikäli

$$f_{\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \mid \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mathbf{X}_i|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}_i \mid \mathbf{z})$$

kaikilla $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ ja kaikilla $\mathbf{z}$.

Riippumattomuus ja ehdollinen riippumattomuus ovat eri asioita

- Ehdollisesti riippumattomat satunnaisvektorit eivät tyypillisesti ole marginaalisesti riippumattomia, eli riippumattomia niiden (reuna-)yhteisreunajakaumassa.
- Esim. jos $(\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}) \mid \mathbf{Z}$, niin

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \int f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}\mid\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{y} \mid \mathbf{z})\, f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z} \\
&= \int f_{\mathbf{X}\mid\mathbf{Z}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})\, f_{\mathbf{Y}\mid\mathbf{Z}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{z})\, f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z},
\end{aligned}
$$

  eikä tämä tyypillisesti enää faktoroidu.

9.5 Tilastollisia malleja

- Tilastolliseen päättelyyn on kaksi pääasiallista lähestymistapaa: ns. frekventistinen päättely ja Bayes-päättely.
- Ne molemmat perustuvat uskottavuusfunktion käyttöön.
- Jotta uskottavuusfunktio saataisiin selville, pitää selvittää havaintosatunnaisvektorin tiheys (esim. ypntf tai ytf).

Tilastollisen päättelyn perusasetelma

- Meillä on numeerinen aineisto vektorin $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ muodossa.
- Ennen havaintojen tekoa aineiston arvot ovat epävarmoja (mittausvirheiden, populaation luonnollisen vaihtelun tms. syyn takia).
- Mallinnamme tilanteen niin, että $\mathbf{y}$ on jollakin perusjoukolla Ω määritellyn satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ havaittu arvo, ts.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\omega^{\mathrm{act}}),$$

jossa ω^{act} on todennäköisyysmallissa aktualisoitunut alkeistapaus.

Tilastollinen malli

- Tyypillisesti vektorin $\mathbf{Y}$ jakauma mallinnetaan parametrisella mallilla, jossa on yksi tai useampia parametreja $\theta_1, \ldots, \theta_p$, jotka kootaan parametrivektoriksi $\boldsymbol{\theta}$.
- Kun parametrivektorin arvo on kiinnitetty, niin tilastollisessa mallissa sv:n $\mathbf{Y}$ jakauman esittää tiheys

$$\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}).$$

- Kiinnostuksen kohteena on sv:n $\mathbf{Y}$ jakauma.
- Sitä voidaan arvoida, jos ensin arvioidaan eli estimoidaan tuntematonta parametrivektoria $\boldsymbol{\theta}$.

Uskottavuusfunktio

- Kun aineisto $\mathbf{y}$ on havaittu, ja havaittua arvoa käytetään funktion $f(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ ensimmäisenä argumenttina, niin funktiota

$$\boldsymbol{\theta} \mapsto f(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$$

  kutsutaan uskottavuusfunktioksi (engl. *likelihood function*).
- Tässä yhteydessä tiheysfunktiosta saatetaan jättää pois kertoimia, jotka eivät riipu parametrivektorista $\boldsymbol{\theta}$, ja silti kyseistä funktiota edelleen kutsutaan uskottavuusfunktioksi.

Frekventistinen päättely

- Ns. klassisessa eli frekventistisessä tilastotieteessä parametrivektoria $\boldsymbol{\theta}$ pidetään tuntemattomana vakiona, josta tiedetään vain, missä joukossa (eli parametriavaruudessa) sen arvot voivat olla.
- Tällöin merkintään $f(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ ei liitetä tulkintaa ehdollisena jakaumana, koska parametrivektorille ei ole olemassa mitään todennäköisyysjakaumaa.
- Tyypillisempi merkintä olisikin $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$.
- Uskottavuusfunktiota esim. maksimoidaan, jolloin saadaan määriteltyä suurimman uskottavuuden estimaatti.

Bayes-päättely

- Bayes-päättelyssä parametrivektoria pidetään satunnaisvektorin $\mathbf{\Theta}$ arvona.
- Funktio $f(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ ja ehdollinen jakauma $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{\Theta}}(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ samastetaan.
- Bayes-päättelyssä tilastollisessa mallissa tarvitaan uskottavuusfunktion lisäksi reunajakauma vektorille $\mathbf{\Theta}$. Tätä kutsutaan priorijakaumaksi. Sen on tarkoitus kuvata ennen havaintoja olevaa tietoa parmetrien järkevistä arvoista.

Bayes-päättely: uskottavuusfunktiosta ja priorista posterioriin

- Parametrivektorin ja havaintovektorin yhteisjakauman esittää tiheys
$$(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \mapsto f_{\boldsymbol{\Theta},\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})\, f_{\mathbf{Y}\mid\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}).$$
- Kun on saatu havainto $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, niin tilastolliset päätelmät tehdään karakterisoimalla parametrivektorin posteriorijakaumaa, joka on ehdollinen jakauma

$$f_{\boldsymbol{\Theta}\mid\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = \frac{f_{\boldsymbol{\Theta},\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} = \frac{f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})\, f_{\mathbf{Y}\mid\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})}{\int f_{\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{t})\, f_{\mathbf{Y}\mid\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{t})\, \mathrm{d}\mathbf{t}}$$

Mihin tilastotieteessä tarvitaan moniulotteisia jakaumia?

- Kummassakin tilastollisen päättelyn lähestymistavassa tarvitaan konkreettinen kaava uskottavuusfunktiolle.
- Uskottavuusfunktio on havaintosatunnaisvektorin yhteisjakauman tiheys (esim. yptnf tai ytf) ajateltuna tuntemattoman parametrivektorin funktiona, kun havainnot on siihen sijoitettu.
- Tämän takia tilastotieteilijän pitää osata johtaa moniulotteisten satunnaisvektoreiden tiheyksiä.
- Monisteessa on tästä joitakin esimerkkejä.

9.6 Tiheysfunktion muuntokaava

- Tarkastelemme diffeomorfisimia $\mathbf{g} : A \to B$, jossa $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ovat avoimia joukkoja.
- Tällöin $\mathbf{g}$:llä on käänteisfunktio $\mathbf{h} : B \to A$, ja sekä $\mathbf{g}$ että $\mathbf{h}$ ovat jatkuvasti derivoituvia.
- Näiden kuvausten komponenttifunktiot ovat

$$\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n), \qquad \mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n).$$

- Nämä funktiot määrittelevät bijektiivisen vastaavuuden koordinaattien $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välillä kaavoilla

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y}).$$

  Tätä ajatusta voidaan merkitä vaihtoehtoisesti kaavoilla

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}).$$

Merkintä osittaisderivaatoille

- Otamme käyttöön merkinnän $D_i\, h_j(\mathbf{y})$ tarkoittamaan reaaliarvoisen funktion h_j osittaisderivaattaa sen i:nnen argumentin suhteen pisteessä $\mathbf{y}$, ts.

$$D_i\, h_j(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_i} h_j(\mathbf{y}).$$

Derivaattamatriisi ja jacobiaani

- Kuvauksen $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ derivaatta tai derivaattamatriisi (tai Jacobin matriisi) pisteessä $\mathbf{y} \in B$ on

$$\begin{bmatrix} D_1 h_1(\mathbf{y}) & D_2 h_1(\mathbf{y}) & \ldots & D_n h_1(\mathbf{y}) \\ D_1 h_2(\mathbf{y}) & D_2 h_2(\mathbf{y}) & \ldots & D_n h_2(\mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 h_n(\mathbf{y}) & D_2 h_n(\mathbf{y}) & \ldots & D_n h_n(\mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

- Kuvauksen $\mathbf{h}$ jacobiaani, eli Jacobin determinantti eli funktionaalideterminantti

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$$

on derivaattamatriisin determinantti.

Tiheysfunktion muuntokaava

Lause

Jos $\mathbf{g} : A \to B$ on diffeomorfismi, $\mathbf{h} : B \to A$ on sen käänteiskuvaus, eli $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$, ja sv:lla $\mathbf{X}$ on jatkuva jakauma, ja $P(\mathbf{X} \in A) = 1$, niin sv:lla $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ on jatkuva jakauma tf:lla

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y}))\,|J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})|, \qquad \text{kun } \mathbf{y} \in B,$$

ja nolla muualla.

Todistus on suora seuraus n-ulotteisten integraalien muuntokaavasta (jossa integraali pitää ymmärtää Lebesguen integraaliksi).

Muistisääntö

Tiheysfunktion muuntokaava (diffeomorfismille) kannattaa pitää mielessään muodossa

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,|\partial\mathbf{x}| = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})\,|\partial\mathbf{y}|, \qquad \text{kun} \tag{14}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \iff \quad \mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B \tag{15}$$

Tiheysfunktion muuntuminen affiinissa muunnoksessa

- Jos $\mathbf{A}$ on vakiomatriisi ja $\mathbf{b}$ on vakiovektori siten, että seuraavassa kaavassa dimensiot ovat yhteensopivia, niin funktiota
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$
kutsutaan affiiniksi muunnokseksi.
- Jos $\mathbf{A}$ on kääntyvä matriisi (jolloin se on neliömatriisi), niin tämän kuvauksen käänteiskuvaus on myös affiini, sillä
$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \iff \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}) = \mathbf{h}(\mathbf{y})$$

Muuntokaava affiinille kuvaukselle — jatkoa

- Kuvauksen $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$ derivaattamatriisi on $\mathbf{A}^{-1}$, joten jacobiaaniksi saadaan

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

- Jos $\mathbf{X}$ on n-ulotteinen sv, jolla on jatkuva jakauma, ja sv $\mathbf{Y}$ määritellään kaavalla $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$, niin muistisäännöstä

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,|\partial \mathbf{x}| = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})\,|\partial \mathbf{y}|$$

saadaan tulos

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right| = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}))\,\frac{1}{|\det(\mathbf{A})|}.$$

9.7 Satunnaisvektorin momenttiemäfunktio

Määritelmä

Satunnaisvektorin $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ momenttiemäfunktio, eli satunnaismuuttujien $X_1, \ldots, X_n$ yhteismomenttiemäfunktio on

$$M(\mathbf{t}) = M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E \exp(\mathbf{t}^T \mathbf{X}) = E \exp\left(\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\right),$$

niillä $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, joilla odotusarvo on määritelty. Sv:n $\mathbf{X}$ kumulanttiemäfunktio (eli sm:ien $X_1, \ldots X_n$ yhteiskumulanttiemäfunktio) on

$$K(\mathbf{t}) = K_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \ln M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}),$$

niillä $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, joilla $M(\mathbf{t})$ on määritelty.

Momenttiemäfunktion ominaisuuksia

Lause

Jos $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ on olemassa jossakin epätyhjässä origon ympäristössä, niin

- $M_{\mathbf{X}}$ määrää sv:n $\mathbf{X}$ jakauman.
- Kertaluvun $(k_1, \ldots, k_n)$ momentti saadaan laskettuna tiettynä momenttiemäfunktion osittaisderivaattana (ks. moniste).

Osista kootun satunnaisvektorin momenttiemäfunktio

Lause

Olkoon $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ sellainen sv, että sen momenttiemäfunktio $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ on olemassa jossakin origon ympäristössä. Olkoon $\mathbf{t} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ositettu samandimensioisiin osiin kuin $\mathbf{Y}$ and $\mathbf{Z}$. Tällöin

(a) Sv:ien $\mathbf{Y}$ ja $\mathbf{Z}$ momenttiemäfunktiot ovat

$$M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}) = M_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{0}), \qquad M_{\mathbf{Z}}(\mathbf{v}) = M_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}, \mathbf{v}).$$

(b) $\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Z}$ jos ja vain jos

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u})\, M_{\mathbf{Z}}(\mathbf{v}).$$

kaikilla riittävän pienillä $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$.

Todistus taululla. Hankalinta on todistaa, että riippumattomuus seuraa momenttiemäfunktion jakautumisesta tekijöihin.