

4 Odotusarvo

- Seuraavaksi kertaamme, miten **satunnaismuuttujan odotusarvo** määritellään diskreetissä ja jatkuvassa tapauksessa.
- Odotusarvolle käytetään englanninkielisessä kirjallisuudessa lukuisia nimityksiä, kuten seuraavia: *mean (value)*, *(mathematical) expectation*, *expected value*.
- Satunnaisvektorin odotusarvo määritellään myöhemmässä kappaleessa.

4.1 Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo

Määritelmä

Jos X on diskreetti sm, jonka arvojoukko on $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ ja ptnf on f , niin sen **odotusarvo** on reaaliluku

$$EX = E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \sum_x x f(x)$$

mikäli sarja on itseisesti summautuva, eli mikäli

$$\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty.$$

Muussa tapauksessa sanotaan että X :llä **ei ole odotusarvoa**. Se seikka, että X :llä on odotusarvo voidaan ilmaista myös sanomalla, että X on **integroituva** sm.

Vähän sarjaoppia

- Äärellinen summa suppenee tietenkin itseisesti; itseinen suppeneminen on relevantti ehto silloin, kun summattavia arvoja on äärettömän monta.
- Jos sarja summautuu itseisesti, niin sille saadaan sama äärellinen summa kaikilla summausjärjestyksillä.
- Toinen tapaus, jossa sarjan summausjärjestyksellä ei ole väliä on se, jossa kaikki summan termit ovat ei-negatiivisia; tällöin sarjan summa voi olla jokin reaaliluku tai ∞ .
- Jos summa suppenee kohti jotakin reaalilukua, mutta ei suppene itseisesti, niin erilaisilla summausjärjestyksillä sarjalle voidaan saada erilaisia summia.
- Itseisen suppenemisen takia odotusarvon määritelmässä ei tarvitse kiinnittää tiettyä summausjärjestystä.

Huomautuksia odotusarvosta

- Jos satunnaismuuttujilla X ja Y on sama diskreetti jakauma, niin niillä on sama odotusarvo. Diskreetin **jakauman odotusarvo** määritellään lukuna EX , jossa X on mikä tahansa kyseistä jakaumaa noudattava sm.
- Odotusarvolla on **fysikaalinen tulkinta massajakauman painopisteenä**.
- Jos massattoman sauvan (=reaaliakseli) pisteisiin x_i asetetaan massat p_i , niin sauva pysyy tasapainossa, mikäli sitä tuetaan alta päin pisteestä EX . Tämä odotusarvon tulkinta säilyy myös muunlaisille jakaumille.

Odotusarvon frekvenssitulkinta

- Olkoon diskreetti sm X sinun voittamasi rahasumma tietyn uhkapelin yhdessä toistossa.
- Jos toistat peliä riippumattomasti N kertaa, niin voitat summan x_i osapuilleen $NP(X = x_i)$ kertaa.
- Keskimääräinen voitosi yhtä peliä kohti on

$$\frac{1}{N} \sum_i x_i NP(X = x_i) = \sum_i x_i f(x_i) = EX.$$

Suurten lukujen laki ja odotusarvon frekvenssitulkinta

- Odotusarvon frekvenssitulkinta perustuu ns. vahvaan suurten lukujen lakiin, joka on yksi todennäköisyysteorian kuuluisimmista tuloksista.
- Todennäköisysteoriassa todistetaan, että riippumattomien ja samoin jakautuneitten satunnaismuuttujien keskiarvo suppenee (otoskoon N kasvaessa rajatta) kohti odotusarvoa jos ja vain jos odotusarvo on olemassa, eli diskreetissa tapauksessa silloin, kun $\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty$.

Esimerkki: vakion odotusarvo

- Vakiota $a \in \mathbb{R}$ voidaan pitää diskreettinä satunnaismuuttujana, joka saa aina arvon a .
- Vastaavaa jakaumaa sanotaan *degeneroituneeksi jakaumaksi*.
- Vakion a odotusarvo on a , sillä

$$Ea = a \cdot 1 = a,$$

Esimerkki: tapahtuman indikaattorin odotusarvo

- Olkoon A tapahtuma, ja asetetaan $p = P(A)$.
- Jos $X = 1_A$, niin $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, ja

$$EX = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

- Tapahtuman indikaattorin odotusarvo on sama kuin kyseisen tapahtuman todennäköisyys.

Esimerkki: binomijakauman odotusarvo

- Olkoon $X \sim \text{Bin}(n, p)$, ja asetetaan $q = 1 - p$.

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{x=0}^n xf(x) = \sum_{x=1}^n xf(x) = \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\ &= np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

- Tässä laskussa käytettiin suoraan odotusarvon määritelmää. Johdamme saman tuloksen myöhemmin helpommalla tavalla.

Esimerkki: diskreetti jakauma, jolla ei ole odotusarvoa

- Tunnetusti sarja $\sum_{x=1}^{\infty} 1/x^2$ suppenee, ja sarja $\sum_{x=1}^{\infty} 1/x$ hajaantuu.
- Olkoon $c = \sum_{x=1}^{\infty} 1/x^2$.
- Määritellään sm X siten, että sen arvojoukko on kokonaisluvut poislukien nolla, ja ptnf on

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{2c} \frac{1}{x^2}, \quad x = \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Tällöin X :llä ei ole odotusarvoa.

Johdattelua seuraavaan lauseeseen

- Jos diskreetin sm:n X arvojoukko on $\{x_1, x_2, \dots\}$, niin X voidaan esittää erillisten tapahtumien $A_i = \{X = x_i\}$ indikaattorien avulla summana

$$X = \sum_{i \geq 1} x_i 1_{A_i}.$$

- Mikäli X :llä on odotusarvo, niin se saadaan summasta

$$EX = \sum_{i \geq 1} x_i f(x_i) = \sum_{i \geq 1} x_i P(A_i).$$

- Joskus on kätevää käyttää jotakin muuta perusjoukon Ω ositusta B_1, B_2, \dots . Jos X on vakio kussakin osituksen palassa B_i , niin seuraava lause totetää, että edellinen kaava pitää yhä paikkansa.

Lause

Jos B_1, B_2, \dots on perusjoukon (äärellinen tai numeroituvasti ääretön) ositus, ja X on integroitava sm, joka saa vakioarvon y_j kullakin palalla B_j , eli

$$X = \sum_{j \geq 1} y_j 1_{B_j},$$

niin

$$EX = \sum_{j \geq 1} y_j P(B_j).$$

Odotusarvon ominaisuuksia

Lause

Olkoot X ja Y diskreettejä satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ovat olemassa. Odotusarvolla on seuraavat ominaisuudet.

- (a) (Positiivisuus) Jos $X \geq 0$, niin $EX \geq 0$.
- (b) Jos $X \geq 0$ ja $EX = 0$, niin X on vakio nolla, ts. $P(X = 0) = 1$.
- (c) (Säilyttää järjestyksen) Jos $X \leq Y$, niin $EX \leq EY$.
- (d) (Vakion odotusarvo) Jos $a \in \mathbb{R}$, niin $Ea = a$.
- (e) (Lineaarisuus) Jos $a, b \in \mathbb{R}$, niin $E(aX + bY) = aEX + bEY$.
- (f) Jos $X \perp Y$, niin satunnaismuuttujalla XY on odotusarvo, ja

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

- (g) EX riippuu vain X :n jakaumasta: jos X :llä ja Y :llä on sama jakauma, niin $EX = EY$.

Lineaarisuus n :lle satunnaismuuttujalle

- Jos X_1 , X_2 ja X_3 ovat integroituvia sm:ia, niin

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + X_3) &= E[(X_1 + X_2) + X_3] = E(X_1 + X_2) + EX_3 \\ &= EX_1 + EX_2 + EX_3. \end{aligned}$$

- Tämä ominaisuus yleistyy mille tahansa äärelliselle lukumäärälle integroituvia satunnaismuuttujia, ts.

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n EX_i,$$

mikäli kaikki odotusarvot EX_i ovat reaalilukuja.

Esimerkki: binomijakauman odotusarvo helpommin

- Jos $X \sim \text{Bin}(n, p)$, niin se voidaan esittää summana

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

jossa $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ja Y_i :t ovat riippumattomia.

- Odotusarvon lineaarisuuden nojalla

$$EX = E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n EY_i = np.$$

- Tässä laskussa ei tarvittu satunnaismuuttujien Y_i riippumattomuutta.

4.2 Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan odotusarvo

Määritelmä

Jos X on jatkuvasti jakautunut sm, ja sen tiheysfunktio on f , niin sen odotusarvo on luku

$$EX = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

mikäli kyseinen integraali **suppenee itseisesti**, eli mikäli

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty.$$

Muussa tapauksessa sanotaan että X :llä **ei ole odotusarvoa**. Se seikka, että X :llä on odotusarvo voidaan ilmaista myös sanomalla, että X on **integroituva** sm.

Esimerkkejä

- *Tasajakauman odotusarvo*: jos $X \sim U(a, b)$, niin (helppo lasku) $EX = \frac{1}{2}(a + b)$.
- *Cauchyn jakaumalla ei ole odotusarvoa*. Sm X noudattaa (perusmuotoista) Cauchyn jakaumaa, jos sillä on tiheys

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tämä on tf, sillä $f \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \Big|_0^{\infty} \arctan x = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1$$

X :llä ei ole odotusarvoa, sillä

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \Big|_0^M \ln(1+x^2) = \infty.$$

4.3 Odotusarvon ominaisuuksia

- Diskreettien ja jatkuvien jakaumien lisäksi on olemassa myös muunlaisia jakaumia.
- Todennäköisysteoriassa odotusarvo EX määritellään perusjoukon Ω yli laskettuna abstraktina Lebesguen integraalina

$$EX = \int X dP = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$

mikäli integrandi on itseisesti integroituva.

- Emme varsinaisesti käytä tätä määritelmää, mutta teemme joitakin sitä koskevia huomautuksia.

Satunnaismuuttujan odotusarvo todennäköisysteoriassa

- Todennäköisysteoriassa määritellään ensin ei-negatiivisen sm:n $Y \geq 0$ integraali EY tietyn rajankäynnin kautta. Tulokseksi saadaan joko jokin ei-negatiivinen reaaliluku (jolloin sanotaan, että Y on integroitava) tai ∞ .
- Merkiltään rajoittamattoman sm:n X odotusarvo määritellään jakamalla se ensin *positiiviseen osaan* $X^+ \geq 0$ sekä *negatiiviseen osaan* $X^- \geq 0$ seuraavasti

$$X^+ = \max(X, 0), \quad X^- = \max(-X, 0). \quad (1)$$

Tällöin

$$X = X^+ - X^-, \quad \text{ja} \quad |X| = X^+ + X^-. \quad (2)$$

Merkiltään rajoittamattoman sm:n odotusarvo

- Mikäli sekä EX^+ ja EX^- ovat äärellisiä, niin EX määritellään kaavalla

$$EX = EX^+ - EX^-. \quad (3)$$

Tällöin sanotaan, että X on *integroituva*.

- Joissakin tarkasteluissa odotusarvolle sallitaan reaalilukujen lisäksi arvot $+\infty$ tai $-\infty$, ts. odotusarvo saa olla **laajennettu reaaliluku** (engl. *extended real number*).
- Jos vain toinen integraaleista EX^+ ja EX^- on äärellinen, niin EX voidaan määritellä käyttämällä kaavaa $EX = EX^+ - EX^-$ sekä laskusääntöjä

$$\infty - a = \infty, \quad a - \infty = -\infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Huomaa, että lausekkeelle $\infty - \infty$ ei voida määritellä arvoa.

- Mikäli X :n odotusarvo on määriteltävissä laajennettujen reaalilukujen avulla kaavalla $EX = EX^+ - EX^-$, sanomme, että odotusarvo **on olemassa laajennettuna reaalilukuna** tai että se **on olemassa laajennetussa mielessä**.
- Jos sanomme, että **odotusarvo on olemassa** tai että satunnaismuuttuja on **integroituva**, niin tämä tarkoittaa sitä, että odotusarvo EX on reaaliluku. Tällöin $E|X| < \infty$.
- Edellä nähtiin esimerkit sekä diskreetistä että jatkuvasti jakautuneesta satunnaismuuttujasta, joilla kummallakaan ei ole olemassa odotusarvoa edes tässä laajennetussa mielessä.

Odotusarvon ominaisuuksia (yleinen tapaus)

Lause

Olkoot X ja Y integroituvia satunnaismuuttujia (siis: odotusarvot $EX, EY \in \mathbb{R}$).

- (a) (Positiivisuus) Jos $X \geq 0$, niin $EX \geq 0$.
- (b) Jos $X \geq 0$ ja $EX = 0$, niin X on vakio nolla, ts. $P(X = 0) = 1$.
- (c) (Säilyttää järjestyksen) Jos $X \leq Y$, niin $EX \leq EY$.
- (d) (Vakion odotusarvo) Jos $a \in \mathbb{R}$, niin $Ea = a$.
- (e) (Lineaarisuus) Jos $a, b \in \mathbb{R}$, niin $E(aX + bY) = aEX + bEY$.
- (f) Jos $X \perp Y$, niin satunnaismuuttujalla XY on odotusarvo, ja

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

- (g) EX riippuu vain X :n jakaumasta: jos X :llä ja Y :llä on sama jakauma, niin $EX = EY$.

Tärkeä epäyhtälö

Lause

X on integroituva jos ja vain jos $|X|$ on integroituva. Tällöin $|EX| \leq E|X|$.

Todistus. Jos X on integroituva, niin $EX^+ \in \mathbb{R}$ ja $EX^- \in \mathbb{R}$, joten

$$E|X| = E(X^+ + X^-) = EX^+ + EX^- \in \mathbb{R}.$$

Toisaalta, jos $E|X| < \infty$, niin välttämättä

$$0 \leq EX^+ < \infty, \quad \text{ja} \quad 0 \leq EX^- < \infty,$$

joten $EX = EX^+ - EX^- \in \mathbb{R}$. Jos X on integroituva, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$|EX| = |EX^+ - EX^-| \leq EX^+ + EX^- = E|X|.$$

4.4 Muunnoksen odotusarvo

- Olkoon X sm, ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio.
- Määritellään sm $Y = g(X) = g \circ X$.
- Yksi tapa laskea Y :n odotusarvo olisi ensin johtaa sm:n Y jakauma. Mikäli Y :n jakauma on joko diskreetti tai jatkuva, voidaan soveltaa tuttuja kaavoja.
- Seuraava lause tarjoaa erilaisen tavan.

Satunnaismuuttujan muunnoksen odotusarvo

Lause

Olkoon X sm, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $Y = g(X)$.

(a) Jos X :llä on diskreetti jakauma ptnf:lla f_X , niin

$$EY = Eg(X) = \sum_x g(x) f_X(x),$$

mikäli summa suppenee itseisesti, eli mikäli

$$\sum_x |g(x)| f_X(x) < \infty$$

(b) Jos X :llä on jatkuva jakauma tf:lla f_X , niin

$$EY = Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

mikäli integraali suppenee itseisesti, eli mikäli

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty.$$

Tiedostamattoman tilastotieteilijän laki

- Mikäli kyseinen odotusarvo on olemassa, niin

$$Eg(X) = \begin{cases} \sum_x g(x) f_X(x) & \text{jos } X\text{:llä on diskreetti jakauma} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{jos } X\text{:llä on jatkuva jakauma} \end{cases} \quad (4)$$

- Myös EX voidaan laskea tällä kaavalla (valitsemalla funktioksi g identiteettifunktio, jolle $g(x) = x$).
- Englanninkielisissä oppikirjoissa kaavalle käytetään usein nimitystä **law of the unconscious statistician**, koska tilastotieteilijät toisinaan käyttävät sitä huomaamatta, että kyseessä ei ole määritelmä vaan että kyseinen kaava pitäisi jollakin tavalla johtaa.

Onko $Eg(X)$ yhtä kuin $g(EX)$?

- Aloittelijat luulevat usein, että $Eg(X)$ on aina yhtäsuuri kuin $g(EX)$.
- Tämä pitää paikkansa affiinille funktiolle $g(x) = a + bx$, mutta ei (yleisesti) muille funktioille.

Lause

Olkoot satunnaismuuttujat $X \perp\!\!\!\perp Y$, ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellaisia funktioita, että $g(X)$ ja $h(Y)$ ovat integroituvia sm:ia. Tällöin

$$E[g(X) h(Y)] = E[g(X)] E[h(Y)].$$

Todistus. Koska $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$ lauseen 3.7 nojalla, niin tämä lause seuraa riippumattomien satunnaismuuttujien tulon kaavasta.

4.5 Momentit

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X

- k :s **origomomentti** eli k :s **momentti** μ'_k on

$$\mu'_k = EX^k, \quad \text{kun } k = 1, 2, \dots$$

- k :s **keskusmomentti** (engl. *central moment*) μ_k on

$$\mu_k = E[(X - EX)^k], \quad \text{kun } k = 1, 2, \dots$$

- kertaluvun r **absoluuttinen momentti** (engl. *absolute moment*) on

$$E|X|^r, \quad r > 0$$

mikäli kyseiset odotusarvot ovat olemassa. Muuten sanotaan, että kyseinen momentti ei ole olemassa.

Huomautuksia momenteista

- Jos $a < 0$ ja $r \neq 0$, niin $|a|^r$ on hyvin määritelty, mutta a^r ei ole reaalinen, ellei r ole kokonaisluku. Tämän takia rajoitutaan kokonaislukukertalukuihin.
- **Odotusarvo** EX on **1. momentti** μ'_1 , ja 1. keskusmomentti $\mu_1 = 0$.
- Keskusmomentti μ_k voidaan esittää origomomenttien $\mu'_j, j \leq k$ avulla kehittämällä lauseke $(X - EX)^k$ binomikaavalla.
- **Toinen keskusmomentti** μ_2 eli **varianssi** on sovelluksissa tärkeä.
- Korkeammista momenteista esim. kolmas keskusmomentti kuvaa jakauman vinoutta ja neljäs keskusmomentti sen huipukkuutta. Tätä korkeampia momenteja käytetään harvoin.

Milloin momentit ovat olemassa?

- Jos $E|X|^s < \infty$ jollekin $s > 0$, niin

$$E|X|^r < \infty, \quad \text{kaikilla } 0 < r < s.$$

Tällöin myös kaikki origomomentit sekä keskusmomentit kertalukua $1 \leq k \leq s$ ovat olemassa.

- *Todistus:* Jos $0 < r < s$ ja $E|X|^s < \infty$, niin

$$\begin{aligned} |X|^r &= |X|^r \mathbf{1}_{\{|X| \leq 1\}} + |X|^r \mathbf{1}_{\{|X| > 1\}} \\ &\leq 1 + |X|^s \mathbf{1}_{\{|X| > 1\}} \leq 1 + |X|^s, \end{aligned}$$

minkä takia

$$E|X|^r \leq 1 + E|X|^s < \infty$$

4.6 Varianssi, keskihajonta ja kovarianssi

Määritelmä (Varianssi ja keskihajonta)

Satunnaismuuttujan X **varianssi** $\text{var } X$ on sen 2. keskusmomentti, eli

$$\text{var } X = \text{var}(X) = E[(X - EX)^2],$$

mikäli kyseinen odotusarvo on hyvin määritelty. Tällöin X :n **keskihajonta** (engl. *standard deviation*) on varianssin $\text{var } X$ (positiivinen) neliöjuuri. Usein X :n varianssia merkitään σ^2 (tai σ_X^2). Tällöin varianssin positiivinen neliöjuuri $\sigma \geq 0$ (tai $\sigma_X \geq 0$) on X :n keskihajonta.

- Varianssi voidaan määritellä vain integroituvalla satunnaismuuttujalle, jolle siis $EX \in \mathbb{R}$. Jos EX on äärellinen, mutta $E[(X - EX)^2] = \infty$, niin voidaan sanoa, että $\text{var } X = \infty$.
- Varianssille $\text{var } X$ käytetään yleisesti myös merkintää $D^2(X)$.
- Mikäli EX^2 on äärellinen, niin myös EX ja $\text{var } X$ ovat äärellisiä, ja

$$\text{var } X = EX^2 - (EX)^2. \quad (5)$$

- *Johto:* Jos $\mu = EX$, niin

$$E(X - \mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = EX^2 - 2\mu^2 + \mu^2.$$

Lause

- (i) Mikäli $\text{var } X$ on olemassa, niin $\text{var } X \geq 0$. Jos $\text{var } X = 0$, niin X on vakio.
- (ii) Jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $\text{var } X$ on olemassa, niin $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var } X$.

Todistus kohdalle (i): taululla.

Todistus kohdalle (ii): $E(aX + b) = aEX + b$, joten

$$\text{var}(aX + b) = E[(a(X - EX))^2] = a^2 E[(X - EX)^2].$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujien X ja Y (välinen) **kovarianssi** $\text{cov}(X, Y)$ on odotusarvo

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)],$$

mikäli kyseinen odotusarvo on olemassa.

- Myöhemmin nähdään (Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön avulla), että odotusarvo $\text{cov}(X, Y)$ on äärellinen ainakin silloin, jos $EX^2 < \infty$ ja $EY^2 < \infty$.

Kovarianssin ominaisuuksia

- Mikäli kyseiset suureet ovat äärellisiä, niin
 - $\text{cov}(Y, X) = \text{cov}(X, Y)$,
 - $\text{var } X = \text{cov}(X, X)$,
- Kun kerrotaan sulut auki, ja lasketaan odotusarvo termi termiltä, saadaan

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)] \\ &= E[XY - X(EY) - (EX)Y + (EX)(EY)] \\ &= E(XY) + (-1 - 1 + 1)(EX)(EY),\end{aligned}$$

joten kovarianssi voidaan laskea myös kaavalla

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - (EX)(EY). \quad (6)$$

Summan ja erotuksen varianssi

Lause

Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joilla on äärelliset toiset momentit. Tällöin

(i) $\text{var}(X + Y) = \text{var } X + \text{var } Y + 2 \text{cov}(X, Y)$ ja
 $\text{var}(X - Y) = \text{var } X + \text{var } Y - 2 \text{cov}(X, Y)$.

(ii) Jos $X \perp Y$, niin $\text{cov}(X, Y) = 0$ ja

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X - Y) = \text{var } X + \text{var } Y.$$

- Huomaa seuraava kaavan $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$ erikoistapaus,

$$\text{var}(-X) = (-1)^2 \text{var}(X) = \text{var}(X).$$

- Summan $X + X$ varianssi voidaan laskea joko kaavan $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$ avulla,

$$\text{var}(X + X) = \text{var}(2X) = 2^2 \text{var} X = 4 \text{var} X,$$

tai kovarianssin avulla,

$$\text{var}(X + X) = \text{var} X + \text{var} X + 2 \text{cov}(X, X) = 4 \text{var} X.$$

Korreloimattomuus ja riippumattomuus

- Summan $X + Y$ varianssi on yhtä kuin muuttujien varianssien summa täsmälleen silloin, kun $\text{cov}(X, Y) = 0$.
- Jos $\text{cov}(X, Y) = 0$, niin sanotaan, että X ja Y **eivät korreloi** eli että X ja Y ovat **korreloimattomia**.
- Edellä nähtiin, että riippumattomuudesta seuraa korreloimattomuus.
- Esimerkin avulla nähdään, että korreloimattomat satunnaismuuttujat eivät välttämättä ole riippumattomia.

Esimerkki: korreloimattomat muuttujat, jotka eivät ole riippumattomia

- Olkoon sm:lla X jatkuva jakauma tf:lla f , ja olkoon f parillinen funktio. Oletetaan lisäksi, että EX^4 on äärellinen.
- Tf:n parillisuuden ansiosta $EX = E(X^3) = 0$, joten

$$\text{cov}(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - (EX)(EX^2) = 0.$$

- Siis X ja X^2 eivät korreloi, mutta ne eivät tietenkään ole riippumattomia satunnaismuuttujia.

n :n riippumattoman satunnaismuuttujan summan varianssi

- Helpolla laskulla nähdään, että jos X_1, \dots, X_n ovat riippumattomia ja niillä on kaikilla äärellinen varianssi, niin tällöin

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i)$$

Esimerkki: binomijakauman varianssi

- Jos $X \sim \text{Bin}(n, p)$, niin se voidaan esittää summana $\sum_{i=1}^n Y_i$, jossa $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ja Y_i :t ovat riippumattomia.
- Nyt $EY_i = p$, joten

$$\text{var } Y_i = E[(Y_i - p)^2] = (0 - p)^2(1 - p) + (1 - p)^2 p = p(1 - p).$$

- Riippumattomuuden nojalla

$$\text{var } X = \sum_{i=1}^n \text{var } Y_i = np(1 - p).$$

4.7 Momenttiemäfunktio ja kumulanttiemäfunktio

Määritelmä (Momenttiemäfunktio)

Satunnaismuuttujan X (jakauman) momenttiemäfunktio eli momenttigeneroivafunktio eli momentit generoiva funktio (engl. *moment generating function, mgf*) on funktio

$$M(t) = M_X(t) = Ee^{tX},$$

joka on (reaalifunktiona) olemassa niissä pisteissä t , joissa kyseinen odotusarvo on (äärellisenä) olemassa.

- Huomaa, että $M(0) = Ee^0 = 1$.
- Momenttiemäfunktio on (argumentin merkkiä vaille) sama asia kuin Laplacen muunnos (engl. *Laplace transform*).

Momentit momenttiemäfunktion avulla: heuristinen johto

- Jos seuraavassa laskussa derivoinnin ja odotusarvon järjestyksen vaihto pystytään jotenkin perustelevaan, niin

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}M_X(t) = \frac{d}{dt}Ee^{tX} = E\frac{\partial}{\partial t}e^{tX} = EXe^{tX},$$

joten $EX = M'_X(0)$.

- Laskemalla toinen derivaatta nähdään, että

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}EXe^{tX} = E\frac{\partial}{\partial t}Xe^{tX} = EX^2e^{tX},$$

joten $EX^2 = M''_X(0)$.

- Samalla tavalla edeten nähdään, että aina $EX^k = M^{(k)}(0)$.

Momentit momenttiemäfunktion avulla: lause

Lause

Jos momenttiemäfunktio $M_X(t)$ on reaalisena olemassa jossakin origon ympäristössä $|t| < h$, jossa $h > 0$, niin $M_X(t)$ on äärettömän monta kertaa derivoituva origossa, X :n kaikki momentit ovat olemassa, ja M_X voidaan esittää suppenevana Taylorin sarjana

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} EX^k, \quad |t| < h.$$

Erityisesti $EX^k = M_X^{(k)}(0)$, $k \geq 1$.

Määritelmä (Kumulanttiemäfunktio)

Jos momenttiemäfunktio $M_X(t)$ on määritelty jossakin origon ympäristössä, niin X :n (jakauman) kumulanttiemäfunktio $K(t) = K_X(t)$ (engl. *cumulant generating function, cgf*) määritellään kyseisessä ympäristössä momenttiemäfunktion logaritmina,

$$K(t) = K_X(t) = \ln M_X(t).$$

Odotusarvo ja varianssi kumulanttiefunktion avulla

- Odotusarvo ja varianssi saadaan laskettua derivoimalla kumulanttiefunktiota origossa:

$$K'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{EX}{1} = EX,$$

$$K''_X(0) = \frac{M''_X(0)M_X(0) - M'(0)M'(0)}{M_X(0)^2} = EX^2 - (EX)^2 = \text{var } X.$$

- Tämä tarjoaa näppärän tavan johtaa odotusarvo ja varianssi joillekin jakaumille, mutta toisille jakaumille sattaa olla kätevämpää johtaa odotusarvo ja varianssi suoraan määritelmistä.

Binomijakauman odotusarvo ja varianssi kumulanttiefunktion avulla

- Jos $X \sim \text{Bin}(n, p)$, niin binomikaavan avulla nähdään helposti, että

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n.$$

- Siis

$$K_X(t) = n \ln(pe^t + 1 - p).$$

- Laskemalla ensimmäinen ja toinen derivaatta origossa nähdään, että

$$EX = K'_X(0) = np, \quad \text{var } X = K''_X(0) = np(1 - p).$$

Momenttiemäfunktion ominaisuuksia

Lause

- (a) Jos a, b ovat vakioita, niin $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$.
- (b) Jos $X \perp Y$, niin $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

Todistus:

$$M_{aX+b}(t) = E \exp(t(aX + b)) = e^{bt} E \exp(atX) = e^{bt} M_X(at),$$

ja kun $X \perp Y$, niin

$$M_{X+Y}(t) = E \exp(t(X + Y)) = E[\exp(tX) \exp(tY)] = E e^{tX} E e^{tY}.$$

Yhtäsuuruus pätee joko muodossa $\infty = \infty$ tai reaalityyppisten lukujen yhtäsuuruutena.

Momenttiemäfunktio määrää jakauman — tietyillä edellytyksillä

Lause

Jos X :n ja Y :n momenttiemäfunktiot ovat molemmat olemassa jossakin origon ympäristössä, ja ovat siellä yhtäsuuret, niin X :llä ja Y :llä on sama jakauma.

Momenttiemäfunktion käytön hankaluuksia

- Jos jokin X :n momentti ei ole olemassa, niin momenttiemäfunktio on määritelty origossa, mutta ei missään origon ympäristössä.
- On olemassa jakaumia (esim. log-normaalinen jakauma), joilla on kaikkien kertalukujen momentit, mutta joiden momenttiemäfunktio ei ole olemassa missään origon ympäristössä.
- Edistyneemmissä todennäköisyyslaskennan kirjoissa käytetään momenttiemäfunktion sijasta jakauman karakteristista funktiota.
- Momenttiemäfunktiota ja kumulanttiemäfunktio ovat tästä huolimatta oleellisia apuvälineitä tietyissä asymptoottisissa tarkasteluissa (esim. suurten poikkeamien teoriassa sekä satulapistekehitelmässä).

4.8 Karakteristinen funktio

- Tietyiltä vaikeuksilta vältytään, mikäli momenttiemäfunktion sijasta käytetään jakauman karakteristista funktiota, sillä karakteristinen funktio on kaikille jakaumille kaikkialla määritelty.
- Karakteristisen funktion määrittelyssä tarvitaan kompleksilukuja.
- Karakteristinen funktio on (argumentin skaalausta vaille) sama asia kuin Fourier'n muunnos (engl. *Fourier transform*).

Karakteristinen funktio

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio (engl. *characteristic function*) on koko reaaliakselilla määritelty kompleksiarvoinen funktio

$$\phi(t) = \phi_X(t) = Ee^{itX}, \quad \text{jossa } i = \sqrt{-1}.$$

- Kompleksinen eksponentti saadaan laskettua kaavalla

$$e^{itX} = \cos(tX) + i \sin(tX),$$

- Sen odotusarvo määritellään laskemalla yhteen reaaliosan ja imaginääriosan odotusarvot,

$$Ee^{itX} = E \cos(tX) + i E \sin(tX).$$

- Karakteristinen funktio $\phi_X(t)$ on määritelty kaikilla X ja kaikilla t sen takia, että se on rajoitetun funktion odotusarvo.