3 Yhteisjakauma

- Kappaleessa 2 tarkastelimme aina yhtä satunnaismuuttujaa kerrallaan.
- Tässä kappaleessa näemme, miten aikaisemmat käsitteet yleistyvät siihen tilanteeseen, jossa samalla perusjoukolla on määriteltynä useampi kuin yksi satunnaismuuttuja.
- Yksi päätavoitteista on määritellä, milloin satunnaismuuttujat ovat riippumattomia.
- Syvenämme moniulotteisten jakaumien käsittelyä myöhemmissä luvuissa.

3.1 Kaksiulotteinen satunnaisvektori ja sen jakauma

Määritelmä (Kaksiulotteinen satunnaisvektori)

Olkoot X ja Y samalla perusjoukolla Ω määriteltyjä satunnaismuuttujia, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ja $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Tällöin (X, Y) on kaksiulotteinen satunnaisvektori (lyh. sv) (engl. *two-dimensional random vector; bivariate random vector*).

Kaksiulotteinen sv (X, Y) on siis kuvaus (funktio)

$$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad \text{siten, että} \quad (X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)).$$

Satunnaisvektorista (X, Y) käytetään myös nimitystä kaksiulotteinen satunnaismuuttuja (engl. *two-dimensional random variable*) tai satunnaismuuttujapari.

Satunnaisvektorin jakauma, eli yhteisjakauma

Määritelmä (Satunnaisvektorin jakauma, yhteisjakauma)

Satunnaisvektorin (X, Y) jakauma eli satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma (engl. *joint distribution*) on $\mathbb{R}^2$:n osajoukoilla A määritelty funktio

$$P((X, Y) \in A) = P(\{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}).$$

Merkintäsopimus: pilkku tarkoittaa leikkausta

- Kun lasketaan tapahtumien leikkauksen todennäköisyyttä, niin tapahtumien väliin voidaan symbolin $\cap$ sijasta merkitä pilkku, seuraavaan tapaan

$$P(X \in A, Y \in B) = P(\{X \in A, X \in B\}) = P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}).$$

- Tässä yhteydessä voidaan käyttää jaksossa 2.1 esiteltyjä merkintöjä.
- Erityisesti merkintä $P(X \leq x, Y \leq y)$ tarkoittaa seuraavaa

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{X \leq x \text{ ja } Y \leq y\}).$$

Satunnaisvektorin kf, eli yhteiskertymäfunktio

Määritelmä (Satunnaisvektorin kertymäfunktio, yhteiskertymäfunktio)

Satunnaisvektorin (X, Y) kertymäfunktio eli satunnaismuuttujien X ja Y yhteiskertymäfunktio (lyh. ykf) (engl. *joint (cumulative) distribution function, joint cdf*) on

$$F_{X,Y}(x,y) = F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Merkintätapa

Kuten yksiulotteisessa tapauksessa, niin myös kaksi- ja useampiulotteisessa tapauksessa kyseessä olevat satunnaismuuttujat voidaan ilmoittaa kertymäfunktion (tai muun jakauman esityksen) alaindekseillä, ellei asiayhteyden perusteella muuten ole selvää, minkä muuttujien yhteisjakauman esityksestä on kyse.

Yhteisjakaumat ja ykf:t vastaavat toisiaan

- Yhteisjakauma määrää ykf:n, sillä

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P((X, Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y]).$$

- Mikäli tunnetaan ykf, niin mittateoriaa käyttäen on mahdollista osoittaa, että ykf:n avulla voidaan laskea *kaikkien* joukkojen A todennäköisyydet kaavassa

$$P((X, Y) \in A), \qquad A \subset \mathbb{R}^2,$$

  eli yhteisjakauma määräytyy yhteiskertymäfunktiosta.

Lause

Yhteiskertymäfunktio määrää jakauman.

Esimerkki: osumistodennäköisyys suorakaiteelle

- Olkoot $x_1 < x_2$ ja $y_1 < y_2$. Lasketaan ykf:n F avulla

  $$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = P((X, Y) \in (x_1, x_2] \times (y_1, y_2]).$$

- Nyt (piirrä kuva!)

  $$\{X \le x_2,\ Y \le y_2\} = \{x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2\} \cup C,$$

  jossa joukot ovat erillisiä, ja $C = A \cup B$, jossa

  $$A = \{X \le x_1, Y \le y_2\}, \quad B = \{X \le x_2, Y \le y_1\}.$$

- Niinpä

  $$\begin{aligned} P(x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2) &= F(x_2, y_2) - P(C) \\ &= F(x_2, y_2) - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Reunajakaumien kertymäfunktiot

- Kun tarkastellaan kahta satunnaismuuttujaa X ja Y, niin yksittäisen sm:n X (tai Y) (yksiulotteista) jakaumaa kutsutaan sen reunajakaumaksi (engl. *marginal distribution*).
- Näiden jakaumien kertymäfunktiot eli X:n ja Y:n reunakertymäfunktiot (engl. *marginal cdf's*) saadaan yhteiskertymäfunktiosta $F_{X,Y}$ raja-arvoina,

$$F_X(x) = P(X \leq x, Y \in \mathbb{R}) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,\infty),$$

ja vastaavasti

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(\infty,y).$$

Ykf:a tarvitaan harvoin käytännön laskuissa

- Poikkeus: kopula (engl. *copula*). (Googlaa esim. *the formula that destroyed Wall Street*)
- Ykf:n sijasta kaksiulotteisia jakaumia käsitellään yleensä niiden yhteispistetodennäköisyysfunktioiden tai yhteistiheysfunktioiden avulla.
- Yhteisjakauma kuvaillaan usein kertolaskusäännön eli ketjusäännön avulla, mitä varten pitää ensin kuvailla yhden muuttujan reunajakauma sekä toisen muuttujan ehdollinen jakauma.
- Käymme seuraavaksi nämä asiat läpi diskreetin yhteisjakauman tapauksessa.
- Jatkuvan yhteisjakauman tapaus käsitellään myöhemmässä luvussa.

3. 2 Diskreetti kaksiulotteinen jakauma

Määritelmä

Sv (X, Y) on diskreetti, eli satunnaismuuttujilla X ja Y on diskreetti yhteisjakauma, jos sv:lla (X, Y) on enintään numeroituva arvojoukko, ts. on olemassa enintään numeroituva joukko $S \subset \mathbb{R}^2$ siten, että

$$P((X, Y) \in S) = 1.$$

Joukko S on satunnaisvektorin (X, Y) arvojoukko eli sen jakauman kantaja. Sv:n (X, Y) pistetodennäköisyysfunktio eli satunnaismuuttujien X ja Y yhteispistetodennäköisyysfunktio (lyh. yptnf) (engl. *joint probability (mass) function, joint pmf*) on

$$f(x, y) = f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y), \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Yptnf:n ominaisuuksia

Yptnf:llä on analogiset ominaisuudet yksiulotteisen jakauman ptnf:n kanssa.

Lause

Olkoon f ja S kuten määritelmässä. Tällöin

a) $0 \leq f(x,y) \leq 1$, ja $f(x,y) = 0$, kun $(x,y) \notin S$.

b) f määrää yhteisjakauman kaavalla

$$P((X,Y) \in B) = \sum_{(x,y) \in B} f(x,y).$$

Lisää yptnf:n ominaisuuksia

- Seurauksena edellisestä, X:n ja Y:n (reuna)pistetodennäköisyydet saadaan summaamalla tarpeeton muuttuja pois yptnf:stä,

$$f_X(x) = P(X = x) = P(X = x, Y \in \mathbb{R}) = \sum_y f(x, y), \quad (1)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(X \in \mathbb{R}, Y = y) = \sum_x f(x, y). \quad (2)$$

  Nämä tulokset sisältyvät kokonaistodennäköisyyden kaavaan (tai sen yleistykseen numeroituvasti äärettömälle ositukselle).

- Lisäksi yptnf summautuu ykköseksi, sillä

$$1 = P((X, Y) \in S) = \sum_{(x,y) \in S} f(x, y).$$

Yptnf määrää diskreetin jakauman

Kuten yhdessä dimensiossa, myös kahdessa dimensiossa pistetodennäköisyysfunktio määrää jakauman.

Lause

Olkoon $S \subset \mathbb{R}^2$ äärellinen tai numeroituvasti ääretön joukko, ja olkoon $f : S \to \mathbb{R}$ ei-negatiivinen funktio siten, että

$$\sum_{(x,y)\in S} f(x,y) = 1.$$

Tällöin se on eräiden diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y yptnf.

Yhteisjakauma on diskreetti jos ja vain jos reunajakaumat ovat diskreettejä

Lause

Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on diskreetti silloin ja vain silloin, kun reunajakaumat ovat diskreettejä.

- Johdimme edellä reunajakaumien ptnf:t.
- Myöhemmin nähdään: jos reunajakaumat ovat jatkuvia, niin yhteisjakauma ei välttämättä ole jatkuva.

Esimerkki: reunajakaumat eivät määrää yhteisjakaumaa

Tarkastellaan diskreettiä yhteisjakaumaa, jonka yptnf:n kantaja S on

$$\{0,1\} \times \{0,1\}$$

ja yptnf on $f(x,y)$. Tällainen yptnf voidaan esittää taulukon muodossa seuraavasti,

$x \backslash y$	0	1	$\sum_y$
0	$f(0,0)$	$f(0,1)$	$f_X(0)$
1	$f(1,0)$	$f(1,1)$	$f_X(1)$
$\sum_x$	$f_Y(0)$	$f_Y(1)$	

Eskimerkki jatkuu 1

- Reunajakaumien ptnf:t ovat taulukon reunasummia ts.

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) = f(x,0) + f(x,1), \qquad x = 0,1,$$
$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y) = f(0,y) + f(1,y), \qquad y = 0,1.$$

- Termi *reunajakauma* selittyy tällaisesta huomiosta.
- Nyt tietenkin

$$X \sim \mathrm{Bernoulli}(f_X(1)) \quad \text{ja} \quad Y \sim \mathrm{Bernoulli}(f_Y(1)).$$

Esimerkki jatkuu 2

- Moni erilainen yhteisjakauma tuottaa samat reunajakaumat.
- Esim. reunajakaumat

$$X \sim \mathrm{Bernoulli}(1/2) \qquad X \sim \mathrm{Bernoulli}(1/2)$$

saadaan seuraavasta taulukosta millä tahansa arvolla $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

$x \backslash y$	0	1	$\sum$
0	a	$\frac{1}{2} - a$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2} - a$	a	$\frac{1}{2}$
$\sum$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

3.3 Ehdolliset pistetodennäköisyysfunktiot

- Jos sv:lla (X, Y) on diskreetti jakauma, niin sm:n X ehdollinen ptnf ehdolla $Y = y$ määritellään ehdollisen todennäköisyyden kaavan avulla,

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x \mid y) = P(X = x \mid Y = y) &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\ &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \end{aligned} \tag{3}$$

  kun y on sellainen piste, jossa $f_Y(y) > 0$.

- Funktio $f_{X|Y}(\cdot \mid y)$ on satunnaismuuttujan X ptnf, kun tiedetään, että $Y = y$.
- Ehdollinen ptnf $f_{Y|X}(y \mid x)$ määritellään analogisesti.

Kertolaskusääntö ja Bayesin kaava

- Kertolaskusääntö eli ketjusääntö kertoo, että

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y)\, f_{X|Y}(x \mid y), \qquad (4)$$

- Bayesin kaava kertoo, että

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\, f_{Y|X}(y \mid x)}{f_Y(y)}. \qquad (5)$$

- Näissä kaavoissa oletetaan, että x ja y ovat sellaisia pisteitä, joissa ei jouduta jakamaan nollalla.

3.4 Useampiulotteinen satunnaisvektori

- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoria $(x_1, \ldots, x_n)$ merkitään $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Silloin, kun se esiintyy matriisien kanssa samassa lausekkeessa, se ymmäretään pystyvektoriksi eli $n \times 1$-matriisiksi,

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

n-ulotteinen satunnaisvektori

Määritelmä

Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat samalla perusjoukolla Ω määriteltyjä satunnaismuuttujia, niin $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ on n-ulotteinen satunnaisvektori (lyh. sv). Se on kuvaus $\Omega \to \mathbb{R}^n$ siten, että

$$\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{bmatrix}$$

Yhteiskertymäfunktio

Määritelmä (Yhteiskertymäfunktio)

Satunnaismuuttujien $X_1, \ldots, X_n$ yhteiskertymäfunktio (ykf) eli satunnaisvektorin $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ kertymäfunktio on

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n),$$

jossa $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Satunnaisvektorin jakauma määritellään samoin kuin aikaisemmin:

$$B \mapsto P(\mathbf{X} \in B), \qquad B \subset \mathbb{R}^n.$$

- Ykf määrää jakauman myös dimensiossa n.
- Korkeissa dimensioissa ykf:a käytetään harvoin konkreettisissa laskuissa, vaan se on lähinnä teoreettinen apuväline.

Yhteispistetodennäköisyysfunktio

Jos kaikki satunnaisvektorin **X** komponentit X_i ovat diskreettejä sm:ia, niin sen ptnf eli sm:ien X_i yhteispistetodennäköisyysfunktio (yptnf) on

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n). \tag{6}$$

3.5 Satunnaismuuttujien riippumattomuus

Määritelmä (Kahden sm:n riippumattomuus)

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, jos

$$P(X \in A \text{ ja } Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B), \qquad \text{kaikilla } A, B \subset \mathbb{R}.$$

Tämä voidaan merkitä $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Riippumattomuuden tulkinta

- Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$ ja $P(Y \in B) > 0$, niin mille tahansa A pätee

$$P(X \in A \mid Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$
$$= \frac{P(X \in A)\, P(Y \in B)}{P(Y \in B)} = P(X \in A).$$

- Lasku voidaan tietenkin toistaa vaihtamalla X:n ja Y:n roolit.
- Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin tieto Y:n arvosta ei anna tietoa X:n jakaumasta ja kääntäen tieto X:n arvosta ei anna tietoa Y:n jakaumasta.

Riippumattomien sm:ien ykf faktoroituu

Lause

Seuraavat seikat ovat yhtäpitäviä,

(a) $X \perp\!\!\!\perp Y$

(b) Yhteiskertymäfunktio faktoroituu reunakertymäfunktioiden tuloksi, eli

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y) \qquad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Riippumattomien diskreettien sm:ien yptnf faktoroituu

Lause

Jos X ja Y ovat diskreettejä satunnaismuuttujia, niin seuraavat seikat ovat yhtäpitäviä,

(a) $X \perp\!\!\!\perp Y$

(b) Yhteispistetodennäköisyysfunktio faktoroituu reunapistetodennäköisyysfunktioiden tuloksi, eli

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \text{kaikilla } x, y.$$

Ehdolliset ptnf:t riippumattomille satunnaismuuttujille

- Juuri todettiin, että diskreeteille X ja Y

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \iff \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \text{kaikilla } x, y.$$

- Kun tätä ominaisuutta verrataan kertolaskusääntöön, niin nähdään, että riippumattomille diskreeteille satunnaismuuttujille X ja Y pätee

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x), \qquad f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y)$$

kaikilla kyseeseen tulevilla argumenteilla.

- Myöhemmässä nähdään, että vastaavat kaavat pätevät myös jatkuville yhteisjakaumille.

Riippumattomien satunnaismuuttujien muunnokset ovat riippumattomia

Lause

Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sekä $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat funktioita, niin myös $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$.

Todistus. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}$ mielivaltaisia. Tällöin

$$\{g(X) \in A, h(Y) \in B\} = \{X \in g^{-1}(A), Y \in h^{-1}(B)\}.$$

Koska $X \perp\!\!\!\perp Y$, on

$$\begin{aligned} P(g(X) \in A, h(Y) \in B) &= P(X \in g^{-1}(A), Y \in h^{-1}(B)) \\ &= P(X \in g^{-1}(A))\, P(Y \in h^{-1}(B)) \\ &= P(g(X) \in A)\, P(h(Y) \in B). \end{aligned}$$

Usean sm:n riippumattomuus

Määritelmä

Satunnaismuuttujat $X_1, \dots, X_n$ ovat riippumattomia, jos

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i), \qquad \text{kaikilla } B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{R}.$$

Tämä voidaan merkitä $X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp$.

Esimerkki: binomijakauman synty toistetussa Bernoullin kokeessa

- Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumattomia Bernoullin jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia, joilla on yhteinen onnistumistn $0 \leq p \leq 1$.
- Kullakin Y_i:llä on ptnf:na

$$f(y) = p^y (1-p)^{1-y}, \qquad \text{kun } y = 0, 1.$$

- Jos $Y_i = 1$ niin onnistutaan toistossa i, ja muuten epäonnistutaan toistossa i.
- Olkoon X onnistumisten lukumäärä n toistossa, eli

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

- Mikä on X:n jakauma?

X:n jakauman johto, 1/2

- Jos $(y_1, \ldots, y_n)$ on jokin jono nollia ja ykkösiä, niin riippumattomuuden nojalla

$$\begin{aligned} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_n = y_n) &= \prod_{i=1}^{n} p^{y_i} (1-p)^{1-y_i} \\ &= p^s (1-p)^{n-s}, \end{aligned}$$

  jossa $s = \sum_{i=1}^{n} y_i$, eli s on ykkösten ja $n - s$ on nollien lukumäärä jonossa $(y_1, \ldots, y_n)$.

X:n jakauman johto, 2/2

- Satunnaismuuttuja X saa arvon $0 \leq x \leq n$ jos ja vain jos satunnaismuuttujat $Y_1, \dots, Y_n$ saavat sellaiset arvot $y_1, \dots, y_n$, että jonossa $(y_1, \dots, y_n)$ on x ykköstä (ja $n - x$ nollaa).
- Tällaisia jonoja on $\binom{n}{x}$ kappaletta, ja niistä kunkin tn on $p^x (1-p)^{n-x}$.
- Todennäköisyyden additiivisuuden nojalla

$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad \text{kun } x = 0, 1, \dots, n.$$

- Ts. $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, eli X noudattaa binomijakaumaa otoskokoparametrilla n ja onnistumistodennäköisyydellä p.

Numeroituvasti äärettömän monen satunnaismuuttujan riippumattomuus

Määritelmä

Satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia, jos satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomia kaikilla $n \geq 2$.

Tätä käsitettä tarvitaan myöhemmin, kun puhutaan jonosta riippumattomia satunnaismuuttujia.

3.6 Trinomijakauma ja multinomijakauma

- Trinomijakauma yleistää binomijakauman mutkattomasti kaksiulotteiseksi diskreetiksi jakaumaksi.
- Multinomijakauma on trinomijakauman yleistys korkeampaan ulottuvuuteen.

Trinomijakauma

- Olkoot $p_1, p_2 > 0$ todennäköisyyksiä siten, että $p_1 + p_2 < 1$. Olkoon $n \geq 1$ positiivinen kokonaisluku.
- Tällöin

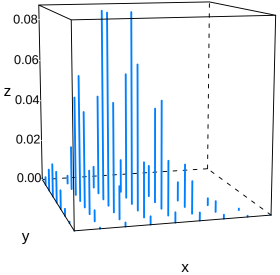
$$f(x, y) = \binom{n}{x, y, n-x-y} p_1^x \, p_2^y \, (1-p_1-p_2)^{n-x-y}, \qquad x, y \geq 0,$$

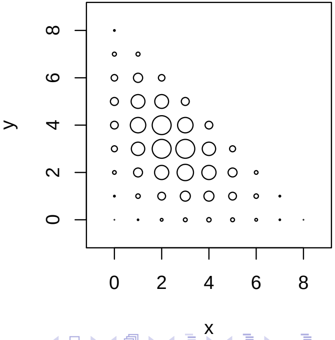
  on trinomijakauman $\mathrm{Trin}(n, (p_1, p_2))$ yptnf.
- Kaavassa esiintyvä trinomikerroin (tai yleisemmin multinomikerroin) on (ks. jakso 1.7)

$$\binom{n}{x, y, n-x-y} = \frac{n!}{x! \, y! \, (n-x-y)!}$$

Kuva trinomijakauman $\mathrm{Trin}(8, (0.3, 0.4))$ yptnf:stä

Ensimmäisessä tavassa funktio $z = f(x, y)$ on esitetty perspektiivikuvana. Toisessa tavassa kolmas dimensio esitetään piirtosymbolin koon avulla: funktion $f(x, y)$ arvo on verrannollinen pisteeseen (x, y) piirretyn ympyrän pinta-alaan.





Miksi $f(x, y)$ on ypntf

- Multinomikaavan perusteella

$$\begin{aligned} 1 &= [p_1 + p_2 + (1 - p_1 - p_2)]^n \\ &= \sum_{x,y} \binom{n}{x, y, n-x-y} p_1^x \, p_2^y \, (1 - p_1 - p_2)^{n-x-y}, \end{aligned}$$

  jossa summa otetaan niiden kokonaislukuparien (x, y) yli, joille $x, y \geq 0$ ja $x + y \leq n$.
- Lisäksi jokainen summan termeistä on positiivinen.

Trinomijakauman toistokoetulkinta

- Tarkastellaan koetta, jonka yhdessä toistossa saadaan täsmälleen yksi tuloksista A, B tai C.
- Olkoon yhdessä toistossa

$$p_1 = P(A), \quad p_2 = P(B), \quad p_3 = P(C) = 1 - p_1 - p_2.$$

- Toistetaan tätä koetta riippumattomasti n kertaa.

Toistokoetulkinta (jatkoa 1)

- Z_i kertoo lopputuloksen toistossa numero i siten, että

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{jos tulos on } A, \\ 2 & \text{jos tulos on } B, \\ 3 & \text{jos tulos on } C. \end{cases}$$

- Tällöin kaikilla i

$$P(Z_i = z) = p_z, \qquad \text{kun } z = 1, 2, 3.$$

- Määritellään, että
  - sm X on niiden i lkm, joilla $Z_i = 1$ (eli lopputuloksen A lkm) ja
  - sm Y on niiden i lkm, joilla $Z_i = 2$ (eli lopputuloksen B lkm).
  - niitä i, joilla $Z_i = 3$ (eli lopputuloksen C lkm) on $n - X - Y$.

Toistokoetulkinta (jatkoa 2)

Jos $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ on arvoista 1, 2 tai 3 koostuva jono, niin

$$
\begin{aligned}
P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \ldots, Z_n = z_n) &= p_{z_1}\, p_{z_2} \ldots p_{z_n} \\
&= p_1^x\, p_2^y\, p_3^{n-x-y}.
\end{aligned}
$$

- x on lopputuloksen A lkm annetussa jonossa eli niiden i lkm, joilla $z_i = 1$
- y on lopputuloksen B lkm eli niiden i lkm, joilla $z_i = 2$
- lopputuloksen C lkm eli niiden i lkm, joille $z_i = 3$ on $n - x - y$.

Toistokoetulkinta (jatkoa 3)

- Kiinnitetään kokonaisluvut x ja y siten, että $x, y \geq 0$ ja $x + y \leq n$.
- Sellaisia jonoja $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ jotka koostuvat arvoista 1, 2 tai 3, joissa tulosta 1 on x kpl ja tulosta 2 on y kpl on multinomikertoimen

$$\binom{n}{x, y, n-x-y}$$

ilmaisema määrä, sillä kukin tälläinen jono vastaa täsmälleen yhtä tapaa osittaa n-alkionen joukko kolmeen osaan siten, että ensimmäiseen osaan tulee x kpl alkioita ja toiseen osaan y kpl alkioita (jolloin kolmanteen osaan jää $n - x - y$ kpl alkioita).
- Jokaiselle tällaiselle jonolle

$$P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \ldots, Z_n = z_n) = p_1^x \, p_2^y \, p_3^{n-x-y}.$$

Toistokoetulkinta (loppu)

- Tällä tavalla nähdään, että

$$P(X = x, Y = y) = \binom{n}{x, y, n - x - y} p_1^x \, p_2^y \, p_3^{n-x-y},$$

  jossa $p_3 = 1 - p_1 - p_2$.
- Toisin sanoen satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on trinomijakauma otoskokoparametrilla n ja todennäköisyysparametreilla (p_1, p_2).

Reunajakaumat toistokoetulkinnan avulla

- Sm:n X reunajakauma on $X \sim \mathrm{Bin}(n, p_1)$.
- Ajattele toistokoetta, jossa onnistutaan, kun saadaan lopputulos A ja muuten epäonnistutaan.
- Vastaavasti, $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p_2)$.

Multinomijakauma

- Olkoon $(p_1, \ldots, p_n)$ todennäköisyysvektori, eli kukin $p_i \geq 0$, ja

$$p_1 + \cdots + p_n = 1.$$

- Multinomijakauman $\mathrm{Mult}(k, (p_1, \ldots, p_n))$ ptnf on

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \binom{k}{x_1, \ldots, x_n} p_1^{x_1} \ldots p_n^{x_n}, \tag{7}$$

  kun $x_1 + \cdots + x_n = k$ ja nolla muuten.
- Tässä multinomijakaumaa pidetään n-ulotteisena jakauma, mutta joissakin yhteyksissä on mielekkäämpää pitää sitä $(n-1)$-ulotteisena jakauma (jolloin $X_n = k - X_1 - \cdots - X_{n-1}$).
- Tällä konventiolla binomijakauma ja trinomijakauma ovat multinomijakauman erikoistapauksia.

Multinomijakauman toistokoetulkinta

- Multinomijakauma syntyy, kun tarkastellaan k-kertaista toistokoetta, jossa kussakin toistossa toteutuu yksi n:sta vaihtoehdosta, jossa toistot ovat toisistaan riippumattomia.
- Muuttujat $x_1, \ldots, x_n$ ovat eri lopputulosten frekvenssit k:ssa toistossa.
- Kaava (7) perustellaan samalla tavalla kuin trinomijakauman tapauksessa; viimekädessä vedotaan jaksossa 1.7 esitettyyn multinomikertoimien kombinatoriseen luonnehdintaan.

3.7 Satunnaisvektoreiden riippumattomuus

- Satunnaisvektoreille $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ määritellään riippumattomuus täysin vastaavasti kuin satunnaismuuttujille.
- Samalla päättelyllä kuin aikaisemmin,

$$\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y} \quad \Rightarrow \quad g(\mathbf{X}) \perp\!\!\!\perp h(\mathbf{Y}),$$

kun g ja h ovat mielivaltaisia vektoriargumentin reaaliarvoisia funktioita.

Riippumattomista satunnaismuuttujista kootut satunnaisvektorit ovat riippumattomia

- Jos satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \ldots, X_k; \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$$

ovat riippumattomia, niin tällöin niistä koostuvat satunnaisvektorit **X** ja **Y** ovat riippumattomia, jossa

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k), \qquad \mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m).$$

- Perustelu: satunnaisvektoreiden ykf faktoroituu reunasatunnaisvektoreiden kertymäfunktioiden tuloksi, ts.

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}), \qquad \text{kaikilla } \mathbf{x},\ \mathbf{y},$$

koska se faktoroituu peräti komponenttisatunnaismuuttujien kertymäfunktioiden tuloksi.