Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
6. harjoitus (11. 12. 2012)

1. Jatkoa harjoituksen 5 tehtävään 1. Oletetaan aikaisempien oletusten lisäksi, että $\hat{\beta}$ on asymptoottisesti normaalinen (ks. muistiinpanojen sivut 30–31):

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathsf{N}_p(0, \sigma^2 Q^{-1}).$$

Asetetaan hypoteesi $\mathsf{H}_0\colon A\beta = c$, jossa $c \in \mathbb{R}^q$ ja A on $q \times p$ -matriisi, jonka aste on q.

a) Perustele, että $\sqrt{n}(A\hat{\beta} - c) \xrightarrow{d} \mathsf{N}_q(0, \sigma^2 AQ^{-1}A')$, kun H_0 pätee.

b) Tarkastellaan lineaarisen mallin kurssilla esitettyä F-testisuuretta

$$F = (A\hat{\beta} - c)' \left[A \Big(\sum_{i=1}^{n} Z_i Z_i' \Big)^{-1} A' \right]^{-1} (A\hat{\beta} - c) \Big/ qS^2,$$

jossa $S^2 = n\hat{\sigma}^2/(n-p)$. Osoita, että $qF \xrightarrow{d} \chi^2_q$, kun H_0 pätee. (Ks. Saikkonen: *Lineaarinen malli* (kevät 2007), s. 18.)

Apu. Tarvinnet ainakin lausetta 1.3 ja seurausta 1.2 aikaisemman tehtävän lisäksi. Palauta mieleen lineaarisen mallin kurssilta neliömuoto $(Z-\mu)'\Sigma^{-1}(Z-\mu)$, kun $Z \sim \mathsf{N}(\mu, \Sigma)$. Kurssin kotisivulla on linkki lineaarisen mallin luentomuistiinpanoihin.

2. Tarkastellaan harjoituksen 3 tehtävän 4 mallia $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$, jossa $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\alpha + \beta x_i)$, ja hypoteesia $\mathsf{H}_0\colon \beta = 0$, jonka mukaan selittäjillä x_i ei ole merkitystä.

Muodosta Waldin testisuureen lauseke hypoteesille H_0 ja kerro, mikä on sen asymptoottinen jakauma H_0:n vallitessa. Oletetaan tässä, että lauseen 2.3 tulos ja kaikki siitä seuraava asymptotiikka pätee tarkasteltavalle mallille (käytännössä tämä merkitsee joitakin rajoitteita selittäjien arvoille).

Ohje. Su-estimaattorin $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ lauseketta ei voi ratkaista ”suljetussa muodossa”. Merkitse lyhyesti esim. $\hat{\mu}_i = 1/(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)$. Palauta myös mieleen 2×2 -matriisin käänteismatriisin tarkka muoto.

3. Sama malli ja hypoteesi kuin edellisessä tehtävässä. Johda rajoitettu (eli H_0:n vallitessa muodostettu) su-estimaattori $\tilde{\theta}$. Muodosta sitten Raon testisuureen lauseke ja kerro, mikä on sen asymptoottinen jakauma H_0:n vallitessa.

Ohje. Rajoitettu malli on tuttu aineopintojen päättelyn kurssilta. Käytä testisuureen muodostamiseen kaavaa (2.39) ja sievennä; lopputuloksen voi esittää melko siistinä lausekkeena esim. suureista $\bar{x} = \sum_i x_i/n$ ja $\bar{y}$ sekä $s_x^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2/n$ ja $s_{xy} = \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n$.

Ajankohtaista:

Kurssia voi suorittaa yleistenttitilaisuuksissa. Ilmoittaudu tenttiin WebOodissa normaalin käytännön mukaan. Seuraavat tenttitilaisuudet ovat ti 18. 12. klo 12–16 (ilm. viimeistään 10. 12.) ja to 24. 1. klo 16–20 (ilm. viimeistään 16. 1.). Harjoituslisäpisteet otetaan huomioon näiden kahden tentin tuloksissa.

Viimeinen luento on ti 11. 12. Silloin tehdään lyhyt katsaus kurssin keskeisiin kohtiin ja jaetaan muutama ylimääräinen harjoitustehtävä vapaasti ratkaistavaksi (eivät vaikuta lisäpisteisiin).