Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
1. harjoitus (6. 11. 2012)

1. a) Olkoot $X_1, X_2, \dots$ ja Z satunnaisvektoreita (samaa dimensiota). Näytä, että $X_n \xrightarrow{p} Z$ jos ja vain jos $\|X_n - Z\| \xrightarrow{p} 0$. [*Muista.* Vektoreiden stokastinen suppeneminen on alun perin määritelty komponenteittain.]
   b) Olkoot $X_1, X_2, \dots$ ja $Y_1, Y_2, \dots$ satunnaisvektoreita, joille pätee $\|X_n\| \le \|Y_n\|$ kaikilla n ja $Y_n \xrightarrow{p} 0$. Näytä, että $X_n \xrightarrow{p} 0$. Tässä 0 on nollavektori, joka on samaa dimensiota kuin X_n ja vastaavasti Y_n.

2. Olkoot $X_1, X_2, \dots$ ja Z reaaliarvoisia satunnaismuuttujia. Osoita (vetoamatta luentojen lauseisiin):

   a) Jos $X_n \xrightarrow{p} Z$, niin $X_n \xrightarrow{d} Z$.

   b) Jos $X_n \xrightarrow{d} c$, jossa c on reaalinen vakio, niin $X_n \xrightarrow{p} c$.

   Käytä tarvittaessa todennäköisyyslaskennan kirjallisuutta apuna.

3. Oletetaan, että $\theta_0 \in \mathbb{R}$ on tarkasteltavan tilastollisen mallin parametrin ”todellinen” arvo ja $\hat{\theta}_n$ on sen *asymptoottisesti normaalinen* estimaattori, jolle pätee

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, \sigma^2(\theta_0)),$$

   jossa $\sigma^2(\theta_0)$ on θ_0:sta riippuva positiivinen luku. Osoita, että $\hat{\theta}_n$ on *tarkentuva* eli $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$.

   [*Vihje.* Seuraus 1.1 ja tehtävä 2 edellä.]

4. Oletetaan, että $\Theta \subset \mathbb{R}$ on avoin väli (parametriavaruus), $\theta_0 \in \Theta$ ja $\hat{\theta}_n$ on θ_0:n asymptoottisesti normaalinen estimaattori kuten edellisessä tehtävässä. Todista *delta-menetelmän* tulos (monisteen s. 5 ja 6): jos $h\colon \Theta \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $h'(\theta_0) \neq 0$, niin

$$\sqrt{n}\big(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0)\big) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, [h'(\theta_0)]^2\, \sigma^2(\theta_0)).$$

   [*Ohje.* Väliarvolauseen mukaan $h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0) = h'(\theta_n^*)(\hat{\theta}_n - \theta_0)$, jossa θ_n^* on θ_0:n ja $\hat{\theta}_n$:n välissä. Käytä tehtävien 1 ja 3 tuloksia, lausetta 1.1 ja seurausta 1.1.]

5. Olkoon $\Theta = \mathbb{R}$, $\theta_0 = 0$ ja $\hat{\theta}_n$ kuten tehtävässä 3. Funktio $h(\theta) = \theta^2$ ei toteuta delta-menetelmän oletusta $h'(\theta_0) \neq 0$. Osoita, että nyt pätee

   a) $\sqrt{n}h(\hat{\theta}_n) = \sqrt{n}\hat{\theta}_n^2 \xrightarrow{p} 0$

   b) $nh(\hat{\theta}_n) = n\hat{\theta}_n^2 \xrightarrow{d} \sigma^2(0)\chi_1^2$.

   Opetus. Oletus $h'(\theta_0) \neq 0$ on tärkeä delta-menetelmän mielekkyyden kannalta. Tässä tapauksessa muuttujan $h(\hat{\theta}_n)$ asymptoottisen jakauman muoto saatiin kuitenkin näkyviin valitsemalla ”lihotuskertoimeksi” $\sqrt{n}$:n sijasta n.

   [*Muista.* Määritelmän mukaan $Z^2 \sim \chi_1^2$, kun $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$.]

Lisäpisteitä saa tehtävien ratkaisemisesta 1, 2, 3 tai 4, jos ratkaisee vastaavasti 20, 40, 60, 80 prosenttia annetuista tehtävistä. Tämä edellyttää läsnäoloa harjoitusryhmässä ja valmiutta esittää ratkaisu taululla. Lisäpisteet ovat voimassa yleistenteissä 18. 12. ja 24. 1.