Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria
Harjoitus 4, ratkaisuehdotuksia
29.10.2012

1. Osoita, että alhaalta puolijatkuvat funktiot saavat minimin kompakteissa joukoissa.
ratk. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ alhaalta puolijatkuva ja Ω kompakti joukko. Merkitään $a = \inf_{z \in \Omega} f(z)$. Olkoon $z_n \in \Omega$ jono siten, että $f(z_n) \to a$ kun $n \to \infty$. Koska Ω on kompakti, löytyy $z \in \Omega$ ja osajono z_{n_k} siten, että $z_{n_k} \to z$ kun $k \to \infty$. Alemman puolijatkuvuuden nojalla

$$f(z) \leq \liminf_{k \to \infty} f(z_{n_k}) = a.$$

Siis on oltava $f(z) = a$ ja väite on todistettu.

1. Osoita, että jos $\mathcal{A}$ on perhe alhaalta puolijatkuvia funktioita $f : A \to \mathbb{R}$, niin $x \mapsto \sup\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}, x \in A$, on alhaalta puolijatkuva.
ratk. Merkitään väitteen funktiota g:llä. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Riittää osoittaa, että $\{x \in A : g(x) > a\}$ on avoin. Huomataan, että

$$\bigcup_{f \in \mathcal{A}} \{x \in A : f(x) \leq a\} = \{x \in A : \sup_{f \in \mathcal{A}} f(x) \leq a\}.$$

Mutta puolijatkuvuuden nojalla jokaisella $f \in \mathcal{A}$ joukko $\{x \in A : f(x) \leq a\}$ on suljettu. Koska

$$\{x \in A : g(x) \leq a\} = \{x \in A : \inf_{f \in \mathcal{A}} f(x) \leq a\}$$

saadaan siis avoimien joukkojen yhdisteenä, se on avoin, joten g on alhaalta puolijatkuva.

Huom. alkuperäisessä tehtävänannossa oli virhe; väite ei päde, jos supremum korvataan infimumilla. Tämän nähdäkseen voi tarkastella jonoa jatkuvia funktioita $f_n \colon \mathbb{R}^m \to [0,1]$, joille $spt f_n \subset B(0, 1 + 1/n)$ ja $f_n|_{B(0,1)} \equiv 1$ (tällainen jono on olemassa esimerkiksi Urysohnin lemman nojalla, tai sen voi helposti myös konstruoida). Jos $\mathcal{A} = \{f_n : n \geq 1\}$, niin $\inf_{f \in \mathcal{A}} f = \chi_{\overline{B}(0,1)}$, joka ei ole alhaalta puolijatkuva (vaan ylhäältä puolijatkuva).

3. Osoita, että jos u ja v ovat superharmonisia, $\min\{u, v\}$ on superharmoninen. Anna esimerkki tapauksesta, jossa $\max\{u, v\}$ ei ole superharmoninen.

ratk. Olkoot $u, v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ superharmonisia. Selvästi $g = \min\{u, v\}$ on alhaalta puolijatkuva ja $g(x) > -\infty$ kaikilla $x \in \Omega$. Riittää siis osoittaa, että funktio dominoi keskiarvojaan.

Jos $x \in \Omega$, voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $g(x) = u(x)$. Silloin

$$g(x) = u(x) \geq \int_{S^{n-1}} u(x + r\zeta) d\sigma\zeta \geq \int_{S^{n-1}} \min\{u(x + r\zeta), v(x + r\zeta)\} d\sigma\zeta$$
$$= \int_{S^{n-1}} g(x + r\zeta) d\sigma\zeta,$$

kun $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$. Siten g on superharmoninen.

Olkoon $u(z) = u(x+iy) = x$ ja $v(z) = y$, $z \in \mathbb{C}$. Nämä ovat (super)harmonisia. Silloin $0 = \max\{u(0), v(0)\} = \int_{S^{n-1}} u d\sigma < \int_{S^{n-1}} \max\{u, v\} d\sigma$, sillä $v > u$ $S^{n-1}(0, r)$:n avoimessa joukossa. Siten $\max\{u, v\}$ ei aina ole superharmoninen, vaikka u ja v olisivat. (Sen sijaan se on aina subharmoninen, jos u ja v ovat.)

4. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$. Määritellään $u_a : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ asettamalla $u_a(a) = \infty$ ja kun $x \neq a$, $u_a(x) = -\log|x - a|$, jos $n = 2$, ja $u_a(x) = |x - a|^{2-n}$, jos $n > 2$. Todista, että u on superharmoninen.
ratk. Käytetään vertailuperiaatetta. Selvästi u_a on alhaalta puolijatkuva, ja $u_a \not\equiv \infty$ $\mathbb{R}^n$:ssä. Olkoon U avoin joukko siten, että $\overline{U}$ on kompakti, ja olkoon h harmoninen $\overline{U}$:ssa ja $h \leq u_a$ reunalla ∂U.

Jos $a \notin U$, u_a on harmoninen U:ssa, joten $u_a \geq h$ koko joukossa U (harmonisten funktioiden vertailuperiaatteen nojalla).

Oletetaan sitten, että $a \in U$. Olkoon $M = \max_{\overline{U}} h$ ja $r > 0$ sellainen, että $u_a > M$ joukossa $\overline{B}(a, r)$. Jos $W = \{x \in U : u_a(x) < h(x)\}$ on epätyhjä, pätee $\overline{W} \cap B(a, r) = \emptyset$, joten u_a on harmoninen joukossa $\overline{W}$. Toisaalta $u_a = h$ reunalla ∂W, joten yksikäsitteisyyden nojalla $u_a = h$ koko W:ssa. Tämä on ristiriita, ja siten joukon W on oltava tyhjä.

Täten olemme todistaneet, että u_a on superharmoninen.

5. Anna esimerkki $\mathbb{R}^n$:n superharmonisesta funktiosta, joka ei ole missään pisteessä jatkuva.
ratk. Olkoon u_a edellisen tehtävän funktio. Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ numeroituva tiheä joukko $\mathbb{R}^n$:ssä, ja asetetaan

$$u(x) = P_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_y(x) d\mu y,$$

missä

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_{a_k}$$

on $\mathbb{R}^n$:n äärellinen Borel-mitta. u voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u_{a_k}(x),$$

mistä nähdään suoraan, että se on nousevan jonon

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} u_{a_k}$$

superharmonisia funktioita raja-arvo. Siten se on superharmoninen. Kuitenkaan se ei ole jatkuva, sillä jokaisen pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ jokaisessa ympäristössä on äärettömän monta pistettä, joissa funktio saa arvon ∞.

6. Olkoon $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ alhaalta puolijatkuva funktio, joka ei ole identtisesti ääretön missään Ω:n komponentissa. Todista, että u on superharmoninen, jos ja vain jos jokaisella $x \in \Omega$ on olemassa $r_x > 0$ siten, että

$$u(x) \geq S(u, x, r) := \int_{S^{n-1}} u(x + r\zeta) d\sigma\zeta \text{ kaikilla } 0 < r < r_x.$$

ratk. Jos u on superharmoninen, voidaan valita $r_x = dist(x, \partial\Omega)$.

Oletetaan sitten, että funktiolla u on väitteessä mainittu ominaisuus. Olkoon $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$. Silloin peitteellä $\{B(x, r_x)\}_{x \in \overline{U}}$ on äärellinen osapeite $B(x_l, r_{x_l}), l = 1, \ldots, m$ joten voidaan valita $\rho = \min\{r_{x_l} : 1 \leq l \leq m\} > 0$ siten, että $u|_{B(x,\rho)}$ on superharmoninen jokaisella $x \in \overline{B}(a, r)$.

Haluamme osoittaa, että jos h on $\overline{B}(a, r)$:ssä harmoninen funktio, jolle $u \geq h$ reunalla $\partial B(a, r)$, niin $u \geq h$ kuulassa $B(a, r)$. Jos $u - h$ saa miniminsä reunalla, väite on todistettu. Oletetaan siis, että $u - h$ saavuttaa miniminsä pisteessä $x \in B(a, r)$ ja se on < 0. Koska $u - h$ on superharmoninen $B(x, \rho)$:ssa, se on silloin vakio kyseisessä joukossa. Erityisesti kaikilla $y \in B(x, \rho)$ $u - h$ saa minimin $B(y, \rho)$:ssa, joten $u - h$ on vakio $B(x, 2\rho)$:ssa. Soveltamalla päättelyä induktiivisesti saadaan $u - h$ vakioksi < 0 koko $B(a, r)$:ssa. Tämä on ristiriita, joten väite on todistettu.

7. Todista edellisen väite, kun pallokeskiarvot on korvattu kuulakeskiarvoilla $M(u, x, r) := \frac{1}{m_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u dm_n$.
ratk. Olkoon $x \in \Omega$. Riittää löytää $r_x > 0$ siten, että $u(x) \geq S(u, x, r)$ kaikilla $0 < r < r_x$.

ratk. Jos u on superharmoninen, voidaan taas valita $r_x = dist(x, \partial\Omega)$ luentojen lauseen 6.3 nojalla.

Toista suuntaa varten huomaamme, että edellisen tehtävän ratkaisun päättely voidaan toistaa, jos superharmonisille pätevä (lokaali) minimiperiaate (luentojen lause 6.3) saadaan voimaan. Mutta se seuraa helposti mainitusta ominaisuudesta:

Oletetaan, että u saa lokaalin miniminsä pisteessä $x_0 \in \Omega$, ja olkoon $r' > 0$ siten, että $u(y) \geq u(x_0)$ kaikilla $y \in B(x_0, r)$. Valitaan $r < \min(r', r_{x_0}))$, jolloin $u - u(x_0) \geq 0$ $B(x_0, r)$:ssä, ja

$$0 = u(x_0) - u(x_0) \geq \fint_{B(x_0,r)} [u - u(x_0)] = \fint_{B(x_0,r)} |u - u(x_0)|.$$

Siis $u = u(x_0)$ kuulassa $B(x_0, r)$.

8. Olkoon $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ superharmoninen ja $\overline{B}(x, r_0) \subset \Omega$. Todista, että keskiarvot $S(u, x, r)$ ja $M(u, x, r)$ ovat r:n väheneviä funktiota välillä $(0, r_0]$.
ratk. Olkoot $0 < r < s \leq r_0$. Vertailuperiaatteen nojalla $u \geq P_{x,s}u$ kuulassa $B(x, s)$, erityisesti $u(y) \geq P_{x,s}u(y)$ kaikilla $y \in \partial B(x, r)$. Tästä seuraa, että $P_{x,r}u(y) \geq P_{x,s}u(y)$ kaikilla $y \in \partial B(x, r)$, joten sama pätee koko kuulassa $B(x, r)$. Siten

$$u(x) \geq S(u, x, r) = P_{x,r}u(x) \geq P_{x,s}u(x) = S(u, x, s).$$

Väite on siis todistettu pallokeskiarvolle S.

Toisaalta

$$M(u, x, r) = \fint_{B(x,r)} u = nr^{-n} \int_0^r t^{n-1} S(u, x, t)dt$$

(minkä voi helposti todeta integroimalla polaarikoordinaateissa). Käyttämällä tätä identiteettiä ja $r \mapsto S(u, x, r)$:n vähenevyyttä, saadaan, jos $r < s$.

$$\begin{aligned}
M(u, x, r) - M(u, x, s) &= M(u, x, r)[1 - (r/s)^n] - ns^{-n} \int_r^s t^{n-1} S(u, x, t)dt \\
&\geq M(u, x, r)[1 - (r/s)^n] - ns^{-n} \int_r^s t^{n-1} S(u, x, r)dt \\
&= M(u, x, r)[1 - (r/s)^n] - s^{-n}(s^n - r^n) S(u, x, r) \\
&= [1 - (r/s)^n](M(u, x, r) - S(u, x, r)).
\end{aligned}$$

Siten väite $M(u, x, r)$:n vähenevyydestä seuraa seuraavan tehtävän epäyhtälöstä.

9. Todista, että edellisen tehtävän tilanteessa kaikilla $0 < r \leq r_0$ ja $x \in \Omega$,

$$S(u, x, r) \leq M(u, x, r)$$

ja

$$u(x) = \lim_{r \to 0} S(u, x, r) = \lim_{r \to 0} M(u, x, r).$$

ratk. Koska $u \geq P_{x,r}$ kuulassa $B(x, r)$, saadaan

$$M(u, x, r) = \fint_{B(x,r)} u \geq \fint_{B(x,r)} P_{x,r} = P_{x,r}(x) = \int_{S^{n-1}} u(x+r\zeta) d\sigma\zeta = S(u, x, r).$$

Epäyhtälön

$$S(u, x, r) \leq M(u, x, r) \leq u(x)$$

nojalla on riittävää todistaa raja-arvoja koskeva väite pallokeskiarvoille $S(u, x, r)$.

Superharmonisen funktion u alemmasta puolijatkuvuudesta seuraa

$$u(x) \leq \liminf_{y \to x} u(y) = \lim_{r \to 0} \inf_{y \in B(x,r) \setminus \{x\}} u(y) \leq$$
$$\limsup_{r \to 0} \inf_{y \in S^{n-1}(x,r)} u(y) \leq \limsup_{r \to 0} S(u, x, r) \leq u(x).$$

Siis $u(x) = \limsup_{r \to 0} S(u, x, r)$, ja koska $r \mapsto S(u, x, r)$ on monotoninen, on raja-arvo olemassa. Väite on siis todistettu.

10. Todista, että jos $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ ovat superharmonisia ja $u(x) = v(x)$ melkein kaikilla $x \in \Omega$, niin $u = v$.
ratk. Koska $u = v$ melkein kaikkialla Ω:ssa, kuulakeskiarvoille pätee $M(u, x, r) = M(x, v, r)$ kaikilla $x \in \Omega$ ja $r < dist(x, \partial\Omega)$. Siis

$$u(x) = \lim_{r \to 0} M(u, x, r) = \lim_{r \to 0} M(v, x, r) = v(x)$$

kaikilla $x \in \Omega$.

11. Olkoot $u : \Omega \to \mathbb{R}$ superharmoninen, $U \subset \Omega$ avoin siten että $d(U, \partial\Omega) = d$ ($d = \infty$, jos $\Omega = \mathbb{R}^n$) ja μ äärellinen Borelin mitta, jonka kantaja $spt\mu \subset B(0, d)$. Todista, että konvoluutio $\mu * u$,

$$\mu * u(x) = \int u(x - y) d\mu y,$$

on superharmoninen U:ssa.

ratk. Olkoon $x \in U$. Silloin kaikilla $z \in B(0,d), y \in U$ pätee $y - z \in \Omega$. Fatoun lemman nojalla jokaiselle jonolle $z_n \to x \in U$ pätee

$$\mu * u(x) = \int u(x-y)d\mu y \leq \int \liminf_{n\to\infty} u(z_n - y)d\mu y$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int u(z_n - y)d\mu y = \liminf_{n\to\infty} \mu * u(z_n),$$

joten $\mu * u$ on alhaalta puolijatkuva U:ssa. Selvästi $\mu * u > -\infty$ U:ssa.

Jos $r > 0$ on sellainen, että $\overline{B}(x,r) \subset U$, saadaan puolestaan Fubinin lauseen avulla

$$\fint_{B(x,r)} \mu * u(y)dy = \fint_{B(x,r)} \int u(y-z)d\mu z dy$$
$$= \int \fint_{B(x,r)} u(y-z)dyd\mu z \geq \int u(x-z)\mu z = \mu * u(x).$$

Siten $\mu * u$:n superharmonisuus U:ssa on todistettu.

12. Olkoon $R_\alpha, 0 < \alpha < n$, Rieszin ydin: $R_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$. Todista, että R_α on superharmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $2 \leq \alpha < n$, ja subharmoninen $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:ssa, kun $0 < \alpha \leq 2$. Miksei R_α ole superharmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $\alpha \geq n$, ja subharmoninen koko $\mathbb{R}^n$:ssa, kun $0 < \alpha \leq 2$.
ratk. Yleiselle $\beta \in \mathbb{R}$ pätee

$$\partial_j |x|^\beta = \beta x_j |x|^{\beta-2}$$

ja

$$\partial_j^2 |x|^\beta = \beta|x|^{\beta-2} + \beta(\beta-2)x_j^2|x|^{\beta-4}.$$

Siten

$$\Delta|x|^\beta = \beta|x|^{\beta-2}(n+\beta-2).$$

Luentojen lauseen 6.11 nojalla $x \mapsto |x|^\beta$ on siis superharmoninen koko $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $\beta(\beta+n-2) \leq 0$. Kun $\alpha \in [2,n)$ ja $\beta = \alpha - n$, ehto toteutuu, joten R_α on superharmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä.

Toisaalta kun $\beta = \alpha - n$ ja $\alpha \in (0,2]$, pätee $\beta(\beta+n-2) = (\alpha-n)(\alpha-2) \geq 0$, joten R_α on tällöin subharmoninen $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:ssa. Kannattaa huomata, että lause 6.11 *ei* päde subharmonisille funktioille, joten emme voi päätellä subharmonisuutta koko $\mathbb{R}^n$:ssä.

Kun $\alpha > n$ ja $\beta = \alpha - n$, niin $\beta(\beta+n-2) = (\alpha-n)(\alpha-2) > 0$, joten R_α ei tällöin ole superharmoninen. (Kun $\alpha = n$, voidaan R_α tulkita vakiokuvaukseksi, joka on harmoninen. R_n ei a priori ole origossa hyvin määritelty, mutta voidaan jatkaa siihen niin, että saadaan harmoninen funktio.)

Lyhyt vastaus kysymykseen, miksei R_α ole subharmoninen koko $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $\alpha \in (0,2]$, on, että $R_\alpha(0) = \infty$. Nimittäin, jos R_α olisi subharmoninen, niin määritelmän mukaan $-R_\alpha$ olisi superharmoninen. Kuitenkaan $-R_\alpha$ ei toteuta ehtoa $-R_\alpha > -\infty$ koko $\mathbb{R}^n$:ssä.

13. Olkoon μ äärellinen Borelin mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Todista, että μ:n Rieszin potentiaali R_μ^α,

$$R_\mu^\alpha(x) = \int R_\alpha(x-y)d\mu y,$$

on superharmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $2 \le \alpha < n$, ja subharmoninen $\mathbb{R}^n \setminus spt\mu$:ssa, kun $0 < \alpha \le 2$.
ratk. Tehtävän 11 nojalla, jos $2 \le \alpha < n$, Rieszin potentiaali R_μ^α on superharmoninen koko $\mathbb{R}^n$:ssä.

Tarkastellaan sitten funktiota

$$-R_\mu^\alpha = \int (-R_\alpha(\cdot - y))d\mu y,$$

kun $\alpha \in (0,2]$. Kun $x \notin spt\mu$, pätee $-R_\mu^\alpha > -\infty$, sillä jos $\overline{B}(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus spt\mu$, funktio $y \mapsto -R_\alpha(x-y)$ saa $\overline{B}(x,r)$:ssä pienimmän arvonsa. Siten joukossa $\mathbb{R}^n \setminus spt\mu$ funktio $-R_\mu^\alpha$ on superharmoninen (tehtävien 11 ja 12 nojalla).

14. Olkoot $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ superharmoninen ja $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$. Todista, että $\tilde{u}$ on superharmoninen, missä $\tilde{u}(x) = P_{a,r}(u)(x)$, kun $x \in B(a,r)$, ja $\tilde{u}(x) = u(x)$, kun $x \in \Omega \setminus B(a,r)$.
ratk. Tehtävän 7 nojalla riittää löytää jokaiselle $x \in \Omega$ jokin $r_x > 0$ siten, että $M(\tilde{u},x,\rho) \le \tilde{u}(x)$ kaikilla $\rho < r_x$. Jos $x \in B(a,r)$ tällainen löytyy $P_{a,r}u$:n harmonisuuden nojalla, ja jos $x \in \Omega \setminus \overline{B}(a,r)$, u:n superharmonisuuden nojalla.

Jäljelle jäävät siis pisteet $x \in \partial B(a,r)$. Olkoon ρ mikä tahansa positiivinen luku. Vertailuperiaatteen nojalla $u \ge P_{a,r}u$ joukossa $B(x,\rho) \cap B(a,r)$, joten

$$M(\tilde{u},x,\rho) = |B(x,\rho)|^{-1}\Big(\int_{B(x,\rho)\cap B(a,r)} \tilde{u} + \int_{B(x,\rho)\setminus B(a,r)} \tilde{u}\Big) =$$
$$|B(x,\rho)|^{-1}\Big(\int_{B(x,\rho)\cap B(a,r)} P_{a,r}u + \int_{B(x,\rho)\setminus B(a,r)} u\Big) \le \fint_{B(x,\rho)} u \le u(x) = \tilde{u}(x).$$

Näin olemme todistaneet väitteen.

15. Olkoot $u_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, j = 1,2$, superharmonisia ja v_j u_j:n suurin harmoninen minorantti. Osoita, että $v_1 + v_2$ on $u_1 + u_2$:n suurin harmoninen minorantti.

ratk. Olkoon v $u_1 + u_2$:n suurin harmoninen minorantti. Selvästi $v_1 + v_2 \le v$. Edelleen $v - u_2$ on subharmoninen, ja $v - u_2 \le u_1$. Haluamme osoittaa, että $v - u_2 \le v_1$.

Olkoon w u_1:n suurin subharmoninen minorantti, ts. w on subharmoninen, $w \le u_1$ ja jos w':lla on nämä ominaisuudet, niin $w' \le w$. Olkoon $\overline{B}(a, r)$. Funktion w Poissonin modifikaatio $\tilde{w}$ (ks. tehtävä 14) on myös subharmoninen. w:n maksimaalisuuden nojalla kuitenkin $w \ge \tilde{w}$ ja erityisesti $w \ge P_{a,r}w$ kuulassa $B(a, r)$. Siten w on myös harmoninen, joten v_1:n maksimaalisuuden nojalla $w \le v_1$.

Tästä näemme, että $v - u_2 \le w \le v_1$, eli $v - v_1 \le u_2$. Siten v_2:n maksimaalisuuden nojalla $v - v_1 \le v_2$. Kaiken kaikkiaan saamme halutun yhtälön

$$v = v_1 + v_2.$$