Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Potentiaaliteoria
Harjoitus 1, ratkaisuehdotuksia
24.9.2012

1. Osoita, että $x \mapsto |x|^{2-n}$ on harmoninen $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $n \geq 3$.
ratk. Merkitään $f(x) = |x|^{2-n}$. Tämän ensimmäiset osittaisderivaatat ovat

$$\partial_j f(x) = \frac{2-n}{2} \frac{2x_j}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{n/2}} = (2-n)\frac{x_j}{|x|^n},$$

ja toiset osittaisderivaatat

$$\partial_j^2 f(x) = (2-n)\big(|x|^{-n} - n/2 \frac{2x_j^2}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{n/2+1}}\big) = (2-n)|x|^{-n-2}(|x|^2 - nx_j^2).$$

Täten saamme

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f(x) = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

2. Osoita, että äärellisen Borelin μ mitan potentiaali U_μ,

$$U_\mu(x) = \int |x-y|^{2-n} d\mu y,$$

on harmoninen μ:n kantajan $\operatorname{spt}\mu = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(B(x,r)) > 0 \forall r > 0\}$ komplementissa ($n \geq 3$).
ratk. Olkoon $x \notin \operatorname{spt}\mu$.

$$\begin{aligned}\partial_j U_\mu(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{U_\mu(x+he_j) - U_\mu(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \int_{\operatorname{spt}\mu} \frac{|x+he_j-y|^{2-n} - |x-y|^{2-n}}{h} d\mu y.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\left| \frac{|x+he_j-y|^{2-n} - |x-y|^{2-n}}{h} \right| = |\partial_j f(\xi)| \leq \frac{|x_j - y_j| + |h|}{(|x-y| - |h|)^n}$$

jollekin $\xi \in [x-y, x-y+he_j]$. Koska $x \notin \operatorname{spt}\mu$ ja $\operatorname{spt}\mu$ on suljettu, on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $|x-y| \geq \varepsilon$ kaikilla $y \in \operatorname{spt}\mu$. Kaikilla $|h| < \varepsilon/2$

erotusosamäärä on siis rajoitettu ylhäältä rajoitetulla funktiolla (joukossa $\operatorname{spt}\mu$). Siten dominoidun konvergenssilauseen nojalla

$$\begin{aligned}\partial_j U_\mu(x) &= \lim_{h\to 0}\int_{\operatorname{spt}\mu}\frac{|x+he_j-y|^{2-n}-|x-y|^{2-n}}{h}d\mu y\\ &= \int_{\operatorname{spt}\mu}\lim_{h\to 0}\frac{|x+he_j-y|^{2-n}-|x-y|^{2-n}}{h}d\mu y = \int \partial_j f(x-y)d\mu y.\end{aligned}$$

Samoin, koska

$$\left|\frac{\partial_j f(x-y+he_j)-\partial_j f(x-y)}{h}\right| = |\partial_j^2 f(\xi)| \le M_\varepsilon,$$

kun $|h| < \varepsilon/2$, saamme

$$\partial_j^2 U_\mu(x) = \int \partial_j^2 f(x-y)d\mu y.$$

Siten $\Delta U_\mu(x) = \int \Delta f(x-y)d\mu y = 0$.

3. Todista, että ortogonaaliset lineaarikuvaukset säilyttävät harmonisuuden ja anna esimerkki lineaarikuvauksesta, joka ei säilytä.
ratk. Osoitetaan, että jos T on $\mathbb{R}^n$:n ortogonaalinen kuvaus, niin $\Delta(f\circ T) = (\Delta f)\circ T$. Tästä seuraa, että f on farmoninen jos ja vain jos $f\circ T$ on harmoninen.

Tätä varten olkoon $T = (a_{ij})$. Lasketaan

$$\partial_j(f\circ T)(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\partial_i f(Tx),$$

josta

$$\partial_j^2(f\circ T)(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\partial_j(\partial_i f(Tx)) = \sum_{i,l=1}^n a_{ij}a_{lj}\partial_{jl}^2 f(Tx).$$

Mutta T:n ortogonaalisuuden nojalla matriisin (a_{ij}) sarakkeet muodostavat ortogonaalisen kannan: $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{lj} = \delta_{il}$. Summaamalla yli j:n ja vaihtamalla summausjärjestystä saamme siten

$$\Delta(f\circ T)(x) = \sum_{i,l=1}^n \partial_{jl}^2 f(Tx)\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{lj}\Big) = \sum_{l=1}^n \partial_l^2 f(Tx) = (\Delta f)\circ T(x)$$

Kuten seuraava esimerkki osoittaa, tulos ei päde ilman ortogonaalisuusoletusta. Olkoon $f(x, y) = y^2 - x^2$ ja $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Silloin $f \circ T(x, y) = f(x, x + y) = y^2 + 2xy$, joka ei ole harmoninen, kun taas f on.

4. Todista kaavat

$$\Delta u = div(\nabla u), \Delta(uv) = u\Delta(v) + 2\nabla u \cdot \nabla v + v\Delta(u).$$

ratk.

$$div(\nabla u) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\partial_j u) = \Delta u.$$

Toista kaavaa varten huomataan, että $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$. Ensimmäistä kaavaa hyväksikäyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
&\Delta(uv) = div(u\nabla v) + div(v\nabla u) = \\
&\sum_{j=1}^{n}(\partial_j u \partial_j v + u\partial_j^2 v) + \sum_{j=1}^{n}(\partial_j v \partial_j u + v\partial_j^2 u) \\
&= u\Delta v + 2\nabla u \cdot \nabla v + v\Delta u.
\end{aligned}$$

5. Olkoot u ja v harmonisia. Osoita, että uv on harmoninen, jos ja vain jos $\nabla u \cdot \nabla v = 0$, ja u^2 on harmoninen, jos ja vain jos u on vakio. Oleta, että u ja v tai u ovat reaaliarvoisia, jos täytyy. Täytyykö?
ratk. Oletetaan, että u ja v ovat reaaliarvoisia. Silloin $\Delta(uv) = 0$ jos ja vain jos $u\Delta v + 2\nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u = 2\nabla v \cdot \nabla u = 0$. Näin saamme ensimmäisen väitteen.

Toinen väite seuraa tästä erikoistapauksena; u^2 on harmoninen jos ja vain jos $0 = \nabla u \cdot \nabla u = |\nabla u|^2$, eli jos ja vain jos u on vakio.

Reaaliarvoisuus on tässä oleellista, sillä edellisen tehtävän identiteetit pätevät reaaliarvoisille funktioille. Konkreettisena esimerkkinä voidaan mainita $u(z) = e^z$, joka on harmoninen, samoin kuin u^2, olematta vakio.

6. Olkoon Ω yhtenäinen ja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmoninen ja ei vakio. Osoita, että u on avoin kuvaus, eli $u(U)$ on avoin joukko jokaiselle avoimelle $U \subset \Omega$. Päteekö tämä kompleksiarvoisille funktioille?
ratk. Kiinnitetään $a \in u(U)$ ja olkoon $x \in U$ siten, että $u(x) = a$. Otetaan lisäksi $s > 0$ siten, että $\overline{B}(x, s) \subset U$. Koska u ei ole vakio, se ei ole vakio myöskään pallossa $B(x, s)$, joten löytyy $y \in B(x, s)$ siten, että $u(y) \neq a$.

Oletetaan, että $u(y) < a$. Silloin u saa jatkuvana kuvauksena kaikki arvot väliltä $[u(y), a]$ joukossa $B(x, s)$. Toisaalta u:n täytyy saada myös arvoja $> a$, sillä muutoin

$$\fint_{B(x,s)} u(z)dz < a = u(x).$$

Olkoon siis $z \in B(x, s)$ siten, että $u(z) > a$. Samoin kuin aiemmin, u saa joukossa $B(x, s)$ kaikki arvot välillä $[a, u(z)]$. Siis u saa kaikki arvot välillä $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, missä $\varepsilon = \min\{|a-u(y)|, |u(z)-a|\}$. Toisin sanoen $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset u(U)$.

Jos $u(y) > a$, voidaan vastaavalla päättelyllä löytää $\varepsilon > 0$ siten, että $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset u(U)$. Täten väite on todistettu.

Reaaliarvoisuus on tässäkin oleellista, sillä jos u on reaaliarvoinen harmoninen funktio ja $v = (1 + i)u : \Omega \to \mathbb{C}$, niin v on harmoninen mutta ei avoin.

7. Olkoon Ω rajoitettu, $\partial\Omega$ yhtenäinen, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja harmoninen Ω:ssa. Osoita, että $u(\Omega) \subset u(\partial\Omega)$. Päteekö tämä kompleksiarvoisille funktioille?
ratk. Maksimiperiaatteen nojalla u saa maksiminsa (merkitään b:lla) ja miniminsä, a, alueen Ω reunalla. Koska $\partial\Omega$ on yhtenäinen , u saa joukossa $\partial\Omega$ kaikki arvot väliltä $[a, b]$. Toisaalta $a \leq u(z) \leq b$ kaikilla $z \in \Omega$. Siis

$$u(\Omega) \subset [a, b] \subset u(\partial\Omega).$$

Kuten funktio $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $u(z) = z$ osoittaa, väite ei päde kompleksiarvoisille harmonisille (tai edes konformisille) functiolle: $u(B(0, 1)) = B(0, 1)$ ja $u(\partial B(0, 1)) = \partial B(0, 1)$.

8. Olkoon Ω yhtenäinen ja $u : \Omega \to \mathbb{C}$ jatkuva. Todista, että jos jokaisella $x \in \Omega$ on olemassa jono $r_j > 0, r_j \to 0$, siten että

$$u(x) = \frac{1}{m_n(B(x, r_j))} \int_{B(x,r_j)} u \text{ kaikilla } j,$$

niin u on harmoninen.
ratk. Tarkastelemassa erikseen funktion u reaali- ja kompleksiosia riittää todistaa väite reaaliarvoisille funktioille.

Olkoon siis u reaaliarvoinen ja $\overline{B}(x, R) \subset \Omega$. Olkoon v se harmoninen funktio $B(x, R)$:ssä, joka saa reuna-arvot $u|_{\partial B(x,r)}$ (Dirichlet'n ongelman ratkaisu). Riittää näyttää, että $u - v = 0$ $B(x, R)$:ssä.

Oletetaan, että funktio $u - v$ saa positiivisen arvon pallossa $B(x, R)$ (negatiivisen arvon tapaus käsitellään samoin). Jos $E \subset B(x, R)$ on se joukko, jossa funktio $u-v$ saavuttaa maksiminsa, voidaan valita sellainen $y \in E$, että $|x-y|$ on maksimaalinen. Koska $y \in B(x,R) \subset \Omega$, on olemassa $r>0$, jolle $B(y,r) \subset B(x,R)$ ja

$$u(y) = \fint_{B(y,r)} u(z)dz.$$

Funktion v harmonisuuden nojalla siis

$$(u-v)(y) = \fint_{B(y,r)} [u-v](z)dz.$$

Toisaalta x:n valinnan nojalla $(u-v)(z) \leq (u-v)(y)$ kaikilla $z \in B(x,R)$. Toisaalta kaikilla $z \in B(y,r)$ joille $|x-z| > |x-y|$ täytyy epäyhtälön olla aito (sillä $|x-y|$ oli maksimaalinen). Siten $(u-v)(z) < (u-v)(y)$ positiivimittaisessa $B(y,r)$:n osajoukossa, mikä on ristiriidassa keskiarvokaavan (yllä) kanssa. Siis $u-v$ joukossa $B(x,R)$.