

Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
Rami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Vinkkejä kirjallisiin tehtäviin.
Päivitetty 23. marraskuuta 2012.

Teema I: Kohta (i) on kohdan (ii) erikoistapaus, sen voi todistaa samoilla menetelmillä tai näyttää että kohdan (i) tilanne toteuttaa kohdan (ii) oletukset jossain mielessä. Kohdassa (ii) tarvitsee vain joukon halkaisijan, joukon kuvajoukon sekä Lipschitz-kuvauksen määritelmää.

Teema II: (i)-kohdassa tutki eri tasossa määriteltyjä normeja ja niiden yksikäsympyröitä.
(ii)-kohdassa mieti tarkkaan, ovatko avoimen ja suljetun joukon määritelmät vastakkaisia käsitteitä.

Teema III: (i)-kohdassa kannattaa muistaa, että avoin joukko ei sisällä yhtään reunapistettään.
(ii)-kohdassa kannattaa valita pisteet $a \in A$, $b \in X$ ja muodostaa janapolku

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = (1-t)a + tb.$$

Tämän jälkeen todista, että $\gamma(t_0) \in \partial A$, missä

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in A\},$$

ja päättele väite.

Teema IV: (i)-kohdassa kannattaa tutkia yksiöitä tai suljettuja kuulia, joiden keskipisteet menevät kauas origosta.

(ii)-kohta seuraa Hausdorff-metriikan määritelmästä. Rohkeasti määritelmä käteen ja todistamaan!

Teema V: (i)-kohdassa tutki diskreetin metriikan määritelmää ja jonon suppenemisen määritelmää. Milloin pätee, että $d(x_n, a) < \frac{1}{2}$?

(ii)-kohdassa kannattaa miettiä normiavaruuden osajoukkoa, ja katsoa miltä kuulat näyttävät tässä joukossa. Yhteyksiä relatiivitopologiaan on nähtävissä.

Teema VI: (i) Muistele analyysi I:stä.

(ii) muodosta jatkuva kuvaus $\gamma: [0, 1] \rightarrow B(0, 1)$ (esim. jana), yhdistä kuvaus kuvauksen f kanssa ja sovelta edellistä kohtaa. Muista todistaa, että $\text{Im}(\gamma) \subset B(0, 1)$.

Teema VII: Tutki laskuharjoitusten 11 tehtäviä. Avaruus ℓ_2 on kaikkien niiden reaalityön (x_n) joukko, joille pätee $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$. Metriikkana on normin

$$\|(x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$$

indusoima metriikka.

Teema VIII: (i)-kohdassa tutki erikseen jonon jäseniä jonkun sopivan kynnysindeksin kummallakin puolella.

(ii)-kohdassa toinen ehto riittää ja toinen ei. Muistelee analyysiä ja pohdi jonoa $x_k = \log(k)$.

Teema IX: (i)-kohdassa tutki kurssilla annettuja esimerkkejä eri kuvaustyypeistä. Muista todistaa esimerkkisi kunkinlaisiksi kuvauksiksi tai antaa viitteet todistuksiin.

(ii)-kohdassa mieti minkälaiset asiat rikkovat tasaisen jatkuvuuden.

Teema X: (i)-kohdassa mieti vaikka polynomifunktion $x \mapsto 0$ mielivaltaista kuulaympäristöä.

(ii)-kohdassa muista, että kompaktin joukon kuva on kompakti.