Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Kirjalliset tehtävät.

Päivitetty 1. lokakuuta 2012.

Näistä tehtävistä[1] tulee palauttaa luennoitsijalle kirjallisena vähintään 12 kappaletta ennen kurssin loppumista. Tehtäviä pitää kuitenkin olla ratkaistuna vähintään kahdeksasta eri teemasta[2]. Ennen ensimmäistä välikoetta pitää olla palautettuna vähintään 5 tehtävää ja ennen toista välikoetta yhteensä vähintään 10 tehtävää. Mikäli ratkaisee yhteensä vähintään 15 tehtävää, saa yhden lisäpisteen kurssin arvosteluun. Yhteensä vähintään 18:a tehtävän ratkaisusta saa kaksi lisäpistettä kurssin arvosteluun.

Vastauksia ei tarvitse latoa LaTeX:lla, kunhan ovat sen verran siististi kirjoitettuja että luennoitsija ymmärtää. Ratkaisujen tarkkuus pitäisi olla koevastausten tasoa. Ratkaisujen tulee myös olla oikein, virheellinen vastaus palautuu tekijän korjattavaksi. Deadline palautukselle on lauantaina 29.12.2012 kello 08.00.

Teemat eivät ole missään järjestyksessä, osan ratkaisu tarvitsee kurssin loppuosan työkaluja, osa on ratkaistavissa ensimmäisen viikon jälkeen. Saman teeman tehtävillä on joskus, muttei aina, yhteys toisiinsa. Teeman tehtävät ovat joskus, mutteivät aina, työläysjärjestyksessä. Aiempien kurssien lauseita ei saa käyttää todistuksissa poislukien esimerkkien konstruktointi. (Saatte esimerkiksi tietää, että itseisarvofunktio, trigonometriset funktiot sekä logaritmi- ja eksponenttifunktiot ovat jatkuvia, ja että ne eivät ole polynomifunktioita.)

Teema I:

(i) Olkoon
$$f\colon [0,1] \to (C[-\pi,\pi], \|\cdot\|_p)$$
5-Lipschitz -kuvaus. Näytä, että $\operatorname{Im}(f)$ on rajoitettu joukko.

(ii) Olkoon $f\colon X \to Y$ Lipschitz-kuvaus. Näytä, että joukko $fB(x,r)$ on rajoitettu kaikilla $x \in X$ ja $r \in \mathbb{R}_+$.

Teema II:

(i) Piirrä nelikulmainen ympyrä. (Eli määrittele jokin tason metriikka, jonka suhteen ympyrässä on neljä kulmaa.)

(ii) Mikä virhe tapahtuu seuraavassa todistuksessa? Etsi virhe, kerro miksi kyseessä on virhe ja esitä toimiva todistus.

---

[1] Tässä yhteydessä **tehtävä** tarkoittaa asiaa joka on numeroitu pienellä roomalaisella numerolla. Esimerkiksi "Teema VII: (i) Todista, että jokainen Cauchyn jono on rajoitettu." on yksi tehtävä.

[2] Tässä yhteydessä **teema** tarkoittaa kahden tehtävän kokoelmaa. Ne on numeroitu isoilla roomalaisilla numeroilla.

Lause. Tason $\mathbb{R}^2$ suljettu yksikkökuula $\overline{B}(0,1)$ ei ole avoin joukko avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Todistus. Olkoon $y \in \complement\overline{B}(0,1)$. Suljetun kuulan määritelmän perusteella $d(y,0) > 1$. Merkitään $r := d(y,0) - 1$. Nyt $B(y,r) \subset \complement\overline{B}(0,1)$, sillä kaikilla $z \in B(y,r)$ pätee, että

$$d(0,y) \le d(0,z) + d(z,y) < d(0,z) + r = d(0,z) + d(y,0) - 1,$$

josta seuraa, että $d(0,z) > 1$, jolloin erityisesti $z \in \complement\overline{B}(0,1)$. Täten mielivaltaiselle joukon $\complement\overline{B}(0,1)$ pisteelle löytyy kuulaympäristö joka sisältyy joukkoon $\complement\overline{B}(0,1)$. Täten joukko $\complement\overline{B}(0,1)$ on avoin, eli määritelmän mukaan joukko $\overline{B}(0,1)$ on suljettu, joten se ei voi suljettuna joukkona olla avoin.

□

Teema III:

(i) Olkoon X metrinen avaruus ja $A, B, C \subset X$ avoimia joukkoja. Näytä, että joukkojen A, B ja C yhdisteen reuna jää kaikkien joukkojen A, B ja C ulkopuolelle. (Eli yhdenkään joukon yksikään piste ei ole joukkojen yhdisteen reunalla. Joukko-opin merkinnöillä väitteen voi esittää muodossa $(A \cup B \cup C) \cap \partial(A \cup B \cup C) = \emptyset$.)

(ii) Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kaksi epätyhjää avointa erillistä joukkoa. Näytä, että joukko $\complement(A \cup B)$ on epätyhjä. (Vapaaehtoisena lisähasteena on näyttää, että joukossa $\complement(A \cup B)$ on äärettömän monta pistettä.)

Teema IV:

(i) Anna esimerkki jonosta tason suljettuja ja rajoitettuja joukkoja $B_j \subset \mathbb{R}^2$ siten, että $\lim_{j\to\infty} d(B_1, B_j) = \infty$, missä $d(B_1, B_j)$ on joukkojen etäisyys määritelmän 2.9. mielessä.

(ii) Oletetaan, että metrisen avaruuden X kahdelle kompaktille osajoukolle A ja B pätee, että $d(A,B) = r > 0$ (joukkojen etäisyys määritelmän 2.9. mielessä). Näytä, että tällöin näiden joukkojen Hausdorff-etäisyys[3] $d_{\mathcal{H}}(A,B)$ on vähintään r.

(Voit nyt halutessasi yhdistää tämän tiedon teeman aiempaan tehtävään ja päätellä, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ kompaktien osajoukkojen kokoelma varustettuna Hausdorff-metriikalla ei ole kompakti.)

Teema V:

(i) Olkoon X joukko varustettuna diskreetillä metriikalla. Milloin sen jono (x_n) suppenee? (Tehtävässä vaaditaan tarkempi vastaus kuin lukujonon suppenemisen määritelmä yleisessä metrisessä avaruudessa. Diskreetissä avaruudessa ehto on vahvempi.)

[3] Muistutuksena, kompaktien joukkojen $A, B \subset X$ Hausdorff-etäisyys on luku

$$d_{\mathcal{H}}(A,B) := \inf\{r \in \mathbb{R}_+ \mid A \subset B(B,r), B \subset B(A,r)\}.$$

(ii) Kuratowskin lauseen (Harjoitus 2:16 kirjassa Topologia I) nojalla jokainen metrinen avaruus voidaan nähdä normiavaruuden osajoukkona[4]. Toisaalta lauseen 2.12 nojalla normiavaruuden kuulan halkaisija on kaksi kertaa kuulan säde. Miten on siis mahdollista antaa esimerkki tehtävään 2:18?[5]

Teema VI: (i) Olkoon $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja oletetaan, että

$$f(-1)f(1) < 0.$$

Näytä, että löytyy piste $\xi \in]-1,1[$ jolle pätee, että

$$f(-1)f(\xi)f(1) = 0.$$

(ii) Olkoon $f\colon \overbrace{B(0,1)}^{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja oletetaan, että pisteillä $x_0, y_0 \in B(0,1)$ pätee $f(x_0)f(y_0) \leq 0$. Näytä, että löytyy piste $z \in B(0,1)$ jolle pätee, että $f(x_0)f(z)f(y_0) = 0$.

Teema VII: (i) Näytä, että avaruuden l_2 jonolla $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ei ole kasautumisarvoja, missä $e_1 = (1,0,0,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,0,\ldots)$, $e_3 = (0,0,1,0,\ldots)$, ja niin edelleen.

(ii) Näytä, että avaruus l_2 ei ole kompakti.

Teema VIII: (i) Todista, että jokainen Cauchyn jono on rajoitettu.

(ii) Onko jono (x_n) välttämättä Cauchyn jono, jos

a) $d(x_j, x_{j+1}) \to 0$, kun $j \to \infty$?

b) $\sum_j d(x_j, x_{j+1}) < \infty$?

Teema IX: (i) Anna esimerkki jatkuvausta kuvauksesta, joka

(a) Ei ole Lipschitz.

(b) Ei ole tasaisesti jatkuva.

(c) On tasaisesti jatkuva mutta ei Lipschitz.

(ii) Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ joukko. Esitä

(a) riittävä

(b) välttämätön

ehto joukolle A, jotta minkä tahansa polynomin f rajoittuma joukkoon A on tasaisesti jatkuva.

Teema X: (i) Olkoon $\mathcal{P}$ kaikkien polynomifunktioiden $[0,1] \to \mathbb{R}$ joukko. Onko $\mathcal{P}$ avoin kaikkien jatkuvien kuvausten $[0,1] \to \mathbb{R}$ joukossa, kun metriikkana on sup-normin antama etäisyys?

(ii) Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Osoita, että $fB(0,1)$ on rajoitettu joukko.

[4] Mikäli isometrisen upotuksen käsite ahdistaa, voi tässä tehtävässä ajatella, että tarkastelemme vain metrisiä avaruuksia jotka ovat normiavaruuksien osajoukkoja.

[5] Tehtävässä ei siis haluta ratkaisua tehtävään 2:18 vaan selitystä mikseivät mainitut tulokset ole ristiriidassa keskenään.