Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
ℝami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Laskuharjoítukset 12. Käsitellään perjantaina 7.12.

Näissä harjoituksissa maksimitehtävämäärä on 4.

---

1. Olkoon $f\colon X \to Y$ bilipschitz-kuvaus kahden metrisen avaruuden välillä. Näytä, että jos X on täydellinen, niin fX on täydellinen.

2. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja A_i, $i \in \mathbb{N}$ kokoelma suljettuja epätyhjiä avaruuksia, joille pätee että

   (i) $A_i \supset A_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$

   (ii) $d(A_j) \to 0$, kun $j \to \infty$.

   Todista, että leikkaus
   $$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$$
   sisältää täsmälleen yhden pisteen.

3. Olkoon X yhtenäinen metrinen avaruus, Y metrinen avaruus ja $f\colon X \to Y$ kuvaus jolle pätee, että kaikilla $x \in X$ on olemassa ympäristö, jossa f on vakio. Näytä, että f on vakiokuvaus. Näytä esimerkillä, että mikäli avaruutta X ei oleteta yhtenäiseksi, niin väite ei päde.

4. Olkoon X diskreetti metrinen avaruus jossa on vähintään kaksi pistettä. Muodosta jokin avaruuden X separaatio ja totea että X on epäyhtenäinen.

5* Näytä esimerkillä, että jos tehtävän 2 oletuksista poistaa minkä tahansa ehdoista

   - A_i suljettu kaikilla $i \in \mathbb{N}$
   - $A_i \supset A_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$
   - $d(A_j) \to 0$, kun $j \to \infty$.
   - X täydellinen

   niin väite ei päde.