Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
ℝami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Laskuharjoítukset 11. Käsitellään perjantaina 30.11.

---

1. Olkoon (x_n) kasvava jono reaalilukuja, jolle pätee että $x_k \leq C$ kaikilla k. Näytä, että
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $(x_n) \subset X$ jono. Oletetaan, että on olemassa luku $C > 0$ siten, että kaikilla $i \neq j$ pätee $d(x_i, x_j) \geq C$. Todista, että
   (a) jono (x_n) ei suppene.
   (b) jonon (x_n) yksikään osajono ei suppene.

3. (a) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja oletetaan että avaruudesta X löytyy jono (x_n), jolle pätee että on olemassa luku $C > 0$ siten, että kaikilla $i \neq j$ pätee $d(x_i, x_j) \geq C$. Näytä, että avaruus X ei ole kompakti.
   (b) Näytä, että kompakti joukko on aina rajoitettu.

4. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, $f\colon X \to Y$ kuvaus ja
$$\mathcal{U} = \{U_i \subset X \mid i \in I\}$$
kokoelma avoimia avaruuden X osajoukkoja joille pätee, että $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. Näytä, että jos kuvaus $f|_{U_i}\colon U_i \to Y$ on jatkuva kaikilla i, niin f on jatkuva.

5. Olkoon X joukko ja d sekä e sen kaksi metriikkaa. Merkitään
$$B_d(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\} \quad \text{ja} \quad B_e(a, r) = \{x \in X \mid e(a, x) < r\},$$
missä $x \in X$ ja $r > 0$. Näytä, että metriikat d ja e ovat ekvivalentteja jos ja vain jos kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$ on olemassa luvut r_1 ja r_2 siten, että
$$B_d(x, r_1) \subset B_e(x, r) \quad \text{ja} \quad B_e(a, r_2) \subset B_d(x, r).$$

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määritellään $d'\colon X \times X \to \mathbb{R}$ asettamalla $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Todista, että
   (a) Kuvaus d' on metriikka.
   (b) Metriikat d ja d' ovat ekvivalentteja.

(c) Jokainen metrinen avaruus on homeomorfinen rajoitetun metrisen avaruuden kanssa.

7∗ Olkoon $f\colon X \to Y$ homeomorfismi, missä (X,d) ja (Y,e) ovat metrisiä avaruuksia. Määritellään $d_f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$d_f(x,y) = d'(f(x), f(y)).$$

Todista, että

(a) Kuvaus $f^{-1}\colon (Y,d') \to (X,d_f)$ on 1-bilipschitz.

(b) Metriikat d ja d_f ovat ekvivalentteja.

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X"'] & (Y,d') \arrow[dl, "f^{-1}"] \\
(X,d_f) &
\end{tikzcd}$$