

Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
Rami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Laskuharjoitukset 10. Käsitellään perjantaina 23.11.

1. Olkoon X metrinen avaruus ja (x_n) jono avaruudessa X . Todista, että piste $x_0 \in X$ on jonon (x_n) kasautumisarvo jos ja vain jos jonolla (x_n) on osajono (y_n) joka suppenee kohti pistettä x_0 .
2. Olkoon X metrinen avaruus ja $A, B \subset X$. Todista, että
 - (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 - (b) $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$
3. Todista, että kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on bijektio jos ja vain jos on olemassa kuvauksen f käänteiskuvaus f^{-1} . (Jektioiden ja käänteiskuvauksen määritelmät löytyvät kirjasta luvusta 0; 0.6-0.12.)
4. Olkoon avaruudessa \mathbb{R}^n käytössä Manhattan-normin indusoima metriikka. Todista, että kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(x) = (x, 0, 0, \dots, 0)$ on bilipschitz-kuvaus.
5. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ bijektio kahden metrisen avaruuden välillä. (Eli olkoon $f: X \rightarrow Y$ sellainen kuvaus jolla on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1}: Y \rightarrow X$.) Todista, että kuvaus f on M -bilipschitz jos ja vain jos kuvaukset f ja f^{-1} ovat kummatkin M -Lipschitz -kuvauksia.
6. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ homeomorfismi kahden metrisen avaruuden välillä ja $A \subset X$. Todista, että $\overline{fA} = f\overline{A}$.
- 7* Olkoon X metrinen avaruus. Näytä, että on olemassa normiavaruus V ja upotus $\vartheta: X \rightarrow V$. (Vihje: kirjan tehtävä 2:16.)