Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
ℝami Luisto
`rami.luisto@helsinki.fi`

Laskuharjoítukset 9. Käsitellään perjantaina 16.11.

---

1. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Todista, että $\operatorname{int} A$ on avoin joukko. (Tämä on todistettu luennollakin, mutta tehtävän ideana on miettiä ja yrittää ymmärtää todistus mahdollisimman hyvin.)

2. Olkoon avaruudessa $\mathbb{R}^2$ käytössä Euklidinen metriikka. Määritä formaalisti
   (a) joukon $A = \{(0,1)\}$ sulkeuma.
   (b) joukon $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ sisäpisteet ja sulkeuma.

3. Olkoon X metrinen avaruus ja $U \subset X$. Todista, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.
   (i) Joukko U on avoin.
   (ii) $U \cap \partial U = \emptyset$
   (iii) $\partial U \subset \complement U$
   (iv) Joukko $\complement U$ on suljettu.
   (v) $U = \operatorname{int} U$.

4. Olkoon X metrinen avaruus ja $U \subset X$. Tällöin pätee
$$\overline{W} = \operatorname{kas} W \cup \operatorname{er} W = \operatorname{kas} W \cup W.$$

5. Olkoon X metrinen avaruus. Todista, että joukon $W \subset X$ sulkeuma $\overline{W}$ on *pienin suljettu joukko joka sisältää joukon* W. Tämä tarkoittaa sitä, että seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:
   (i) Joukko $\overline{W}$ on suljettu joukko.
   (ii) $W \subset \overline{W}$.
   (iii) Jos $B \subset X$ on suljettu joukko ja $W \subset B$, niin $\overline{W} \subset B$.

6. Olkoon X metrinen avaruus ja $W \subset X$. Tällöin
$$\overline{W} = \{x \in X \mid d(x,W) = 0\}.$$

7* Olkoon X metrinen avaruus ja $W \subset X$ ja $\widetilde{W}$ joukko, jolle pätee että
   (i) Joukko $\widetilde{W}$ on suljettu joukko.
   (ii) $W \subset \widetilde{W}$.
   (iii) Jos $B \subset X$ on suljettu joukko ja $W \subset B$, niin $\widetilde{W} \subset B$.

   Todista, että $\widetilde{W} = \overline{W}$.