

Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
Rami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Laskuharjoitukset 8. Käsitellään perjantaina 9.11.

1. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Todista, että joukoille $\text{kas } A$, $\text{er } A$ ja $\text{ext } A$ pätee, että $(\text{kas } A) \cap (\text{ext } A) = \emptyset$, $(\text{kas } A) \cap (\text{er } A) = \emptyset$ ja $(\text{er } A) \cap (\text{ext } A) = \emptyset$. Lisäksi

$$X = (\text{kas } A) \cup (\text{er } A) \cup (\text{ext } A).$$

2. Olkoon X joukko sekä $A \subset X$ ja $B \subset X$ kaksi osajoukkoa joille pätee $A \cap B = \emptyset$ sekä $A \cup B = X$. Todista, että $\mathbb{C}A = B$.

Näytä esimerkeillä, että jos kumman tahansa oletuksista $A \cap B = \emptyset$ tai $A \cup B = X$ poistaa, niin väite ei välttämättä päde.

3. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Todista, että pätee

$$(\text{int } A) \subset A \subset (\text{int } A) \cup (\partial A).$$

4. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta X sekä sen osajoukosta A , joille pätee:

(a) $\emptyset \neq \partial A \subset \text{ext } A$

(b) $(\text{kas } A) \cap (\text{int } A) = \emptyset$

(c) $(\text{kas } A) \cap (\partial A) \neq \emptyset$, mutta $\text{kas } A \not\subset \partial A$ ja $\partial A \not\subset \text{kas } A$.

5. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Todista, että $\partial A = \partial(\mathbb{C}A)$.

6. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Todista, että $\partial\partial A \subset \partial A$.

- 7* Anna esimerkki metrisestä avaruudesta X sekä sen osajoukosta $A \subset X$, jolle pätee, että $\partial\partial A \subsetneq \partial A$. Todista, että aina pätee $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.