

Harjoitustehtävät 7. Käsitellään perjantaina 2.11.

1. Määritellään kuvaus  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla kaikilla  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |v_1 - w_1| + 100|v_2 - w_2|.$$

(Tässä  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  ja  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ .) Todista, että kuvaus  $d$  on metriikka näyttämällä, että se toteuttaa metriikan ehdot.

2. (a) (2 p.) Määrittele avoin joukko?  
(b) (4 p.) Olkoon  $(X, d)$  epätyhjä metrinen avaruus,  $x_0 \in X$  piste ja  $r_0 > 0$ . Osoita, että joukko  $S(x_0, r_0)$ , missä

$$S(x_0, r_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r_0\}$$

on avoin joukko avaruudessa  $X$ .

3. (a) Olkoot  $(X, d)$  metrinen avaruus,  $(V, \|\cdot\|)$  normiavaruus ja  $f, g: X \rightarrow V$  kaksi jatkuvaa kuvausta. Todista, että kuvaus

$$h: X \rightarrow V, \quad h(x) = f(x) + g(x)$$

on jatkuva suoraan jatkuvuuden määritelmää käyttäen. Normiavaruudessa on käytössä (luonnollisesti) normin indusoima metriikka  $d_{\|\cdot\|}(a, b) = \|a - b\|$ .

- (b) Olkoon avaruudessa  $\mathbb{R}^2$  käytössä Euklidinen metriikka. Todista, että joukko

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 - y < y < y^2 + 1\}$$

on avoin avaruudessa  $\mathbb{R}^2$ . (Saat käyttää kurssilla todistettuja lauseita, joidenka mukaan vakio- ja projektiokuvaukset sekä jatkuvien reaaliarvoisten kuvausten summa ja tulo ovat jatkuvia.)

4. Olkoot  $(X, d)$ ,  $(Y, d')$  ja  $(Z, d^*)$  metrisiä avaruuksia sekä  $f: X \rightarrow Y$  ja  $g: Y \rightarrow Z$  kuvauksia.

- (a) Todista, että jos kuvaukset  $f$  ja  $g$  ovat jatkuvia, niin kuvaus  $g \circ f$  on jatkuva.  
(b) Todista, että jos  $f$  on  $L_1$ -Lipschitz <sup>1</sup> ja  $g$  on  $L_2$ -Lipschitz, missä  $L_1, L_2 \geq 0$ , niin kuvaus  $g \circ f$  on  $L_1 L_2$ -Lipschitz.

<sup>1</sup>Olkoot  $(A, d_A)$  ja  $(B, d_B)$  metrisiä avaruuksia ja  $L \geq 0$ . Kuvaus  $h: A \rightarrow B$  on  $L$ -Lipschitz, mikäli kaikilla pisteillä  $x, y \in A$  pätee  $d_B(h(x), h(y)) \leq L d_A(x, y)$ .

5. Olkoon

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}$$

ja varustetaan  $X$  metriikalla

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Olkoon

$$\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1).$$

Osoita, että kuvaus  $\varphi$  on jatkuva, kun reaaliakselilla on käytössä tuttu metriikka

$$d'(x, y) = |x - y|.$$

6. Olkoon Euklidisessa avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  käytössä Euklidinen metriikka. Todista, että

$$\partial B(\mathbf{0}, 1) = S^{n-1}(\mathbf{0}, 1),$$

missä

$$S^{n-1}(\mathbf{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{0}, x) = 1\}.$$