Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
`rami.luisto@helsinki.fi`

Harjoitustehtävät 6. Käsitellään perjantaina 12.10.

L1. Todista, että kuvaus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (0, x)$ on jatkuva, kun käytössä on

(a) Manhattan-normin indusoima metriikka.
(b) Tavallinen Euklidinen metriikka.
(c) Chebyshev-normin indusoima metriikka.

L2. Todista, että kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$ on jatkuva, kun käytössä on

(a) Manhattan-normin indusoima metriikka.
(b) Tavallinen Euklidinen metriikka.
(c) Chebyshev-normin indusoima metriikka.

L3. Näytä, että jos $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, niin pätee

$$|f(0) - g(0)| \leq \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

ja

$$|f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2})| \leq \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

---

1. Todista, että kuvaukset $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, kun

$$f(x, y) = x^4y^4 + 9 \quad \text{ja} \quad g(x, y) = x^2 - y - 2.$$

2. Todista, että joukko

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -(xy)^2 - 8 < y < y^2x^4 + 2x^2 + 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

on avoin, kun käytössä on Euklidinen metriikka.

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ avoin joukko. Näytä, että mikäli (x_n) on avaruuden X jono, joka suppenee kohti pistettä $a \in A$, niin on olemassa sellainen kynnysindeksi n_0, että $x_n \in A$ kaikilla $n \geq n_0$.

   Totea, että mikäli jonolle $(y_n) \subset Y$ pätee, että $y_n \to b$ ja $y_n \notin A$ kaikilla n, niin $b \notin A$.

4. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, missä d' on diskreetti metriikka ja $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Näytä, että kaikilla avaruuden X pisteillä x on sellainen ympäristö U_x, että $f(y) = f(x)$ kaikilla $x \in U_x$.

5. Varustetaan joukko $C[0,1]$ normin

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

indusoimalla metriikalla. Näytä, että joukko

$$A = \{g \in C[0,1] \mid \int_0^1 |g(x)| \, \mathrm{d}x > 4\}$$

on avoin.

6. Varustetaan avaruus $C[0,1]$ max-normilla

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Näytä, että kuvaus $\alpha\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ on Lipschitz, kun asetetaan $\alpha(f) = f(0)$. Onko kuvaus $\beta\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz, kun asetetaan $\beta(f) = \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$?

7*. Onko tehtävän X joukko A avoin, kun avaruus $C[0,1]$ varustetaan sup-normin indusoimalla metriikalla?

Vihjeitä: (Näitä ei taaskaan sovi katsoa ennen kuin on miettinyt tehtävää vähintään 10 minuuttia kellosta katsoen!)

Tehtävässä 5 kannattaa käyttää lausetta 4.8. ja todistaa kuvaus $f \mapsto \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x$ Lipschitz-kuvaukseksi käyttämällä “kolmioepäyhtälön toista suuntaa”: $||x| - |y|| \le |x - y|$ joka pätee kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Tehtävässä 6 kummatkin ovat Lipschitz-kuvauksia. Muista, että Analyysi I:n perusteella $|\int f| \le \int |f|$.