

Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
Rami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Harjoitustehtävät 5, käsitellään perjantaina 5.9.
Päivitetty 29. syyskuuta 2012.

-
- L1. Näytä, että reaaliakselin avoin väli $]0, 1[$ on avoin joukko. (Käytössä on taas metriikka $d(x, y) = |x - y|$.)
- L2. Näytä, että reaaliakselin rajoittamaton avoin väli $]0, \infty[$ on avoin joukko. (Käytössä on taas metriikka $d(x, y) = |x - y|$.)
- L3. Olkoot A_1, A_2, \dots metrisen avaruuden X avoimia osajoukkoja. Näytä, että niiden yhdiste on avoin.

-
1. Näytä, että joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on avoin, kun käytössä on Manhattan-normin indusoima metriikka ja
- (a) $A =]-1, 1[\times]-1, 1[$.
- (b) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2\}$.
2. Näytä, että joukko $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ei ole avoin, kun käytössä on Manhattan-normin indusoima metriikka.
3. Asetetaan joukkoon \mathbb{N} topologia asettamalla

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A = \emptyset \text{ tai } \mathbb{C}A \text{ on äärellinen}\}.$$

Näytä, että kyseessä on topologia. (Huomaa, että tyhjä joukko on äärellinen, koska se ei sisällä äärettömän monta alkioita.)

4. Varustetaan kaikkien jatkuvien kuvausten $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ joukko $C[0, 1]$ max-normin indusoimalla metriikalla

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Näytä, että joukko $A = \{f \in C[0, 1] \mid f(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in [0, 1]\}$ on avoin.

5. Todista, että edellisen tehtävän joukko A ei ole avoin, mikäli käytössä oleva metriikka on

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx.$$

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Näytä, että joukko A on kaikkien ympäristöjensä¹ leikkaus. Anna esimerkki joukosta $B \subset \mathbb{R}$ joka ei ole kaikkien kuulaympäristöjensä² leikkaus.
- 7*. Todista, että tehtävän 3 tilanteessa millään kahdella pisteellä ei ole erillisiä avoimia ympäristöjä. (Eli että millä tahansa pisteillä $m, n \in \mathbb{N}$ ja avoimilla joukoilla $U \ni n$ ja $V \ni m$ pätee $U \cap V \neq \emptyset$.) Päättele halutessasi, ettei kyseinen topologia ei ole minkään metriikan synnyttämä.

Vihjeitä: (Näitä ei taaskaan sovi katsoa ennen kuin on miettinyt tehtävää vähintään 10 minuuttia kellosta katsoen!)

Tehtävässä 3 käy rauhallisesti läpi topologian määritelmä, kirjassa määritelmä 3.13*.
Tehtävät 4 ja 5 ovat yhdessä kirjan tehtävä 3:6, kirjan tehtävänannon yhteydessä on muutama vinkki.
Tehtävässä 6 kannattaa huomata, että jos $A \subset X$ ja $x \notin A$, niin $X \setminus \{x\}$ on avoin joukko ja erityisesti joukon A ympäristö. Vastaesimerkissä suosittelen pohtimaan rationaalilukujen joukkoa.

¹Joukon A ympäristö on mikä tahansa avoin joukko U joka sisältää joukon A ; $A \subset U$.

²Joukon A kuulaympäristö on muotoa $\{x \in X \mid d(x, A) < r\}$ oleva joukon ympäristö.