Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Harjoitustehtävät 4, käsitellään perjantaina 28.9.

L1. Näytä, että kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka määritellään asettamalla $f(x,y) = (4x, 10x - 10y)$ on jatkuva, kun avaruus $\mathbb{R}^2$ on varustettu sekä lähtö- että maalipuolella Manhattan-normin indusoimalla metriikalla.

L2. Näytä, että kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka määritellään asettamalla $f(x,y) = (4x, 10x - 10y)$ on Lipschitz, kun avaruus $\mathbb{R}^2$ on varustettu sekä lähtö- että maalipuolella Manhattan-normin indusoimalla metriikalla.

L3. Näytä, että metrisen avaruuden kuula on aina rajoitettu joukko.

---

1. Olkoon $\mathbb{R}^2$ varustettuna Chebyshev-normin indusoimalla metriikalla d. Näytä, että kuvaukset

   (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y$

   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (9x - y, 2x)$

   ovat jatkuvia, kun avaruudessa $\mathbb{R}$ on käytössä tavallinen itseisarvon antama metriikka $d'(x,y) = |x - y|$.

2. Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) ja (Z, d_Z) metrisiä avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ sekä $g\colon Y \to Z$ jatkuvia kuvauksia. Näytä, että kuvaus $g \circ f\colon X \to Z$ on jatkuva kuvaus.

3. Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) ja (Z, d_Z) metrisiä avaruuksia, $f\colon X \to Y$ L-Lipschitz -kuvaus ja $g\colon Y \to Z$ M-Lipschitz -kuvaus. Näytä, että $g \circ f\colon X \to Z$ on LM-Lipschitz -kuvaus.

4. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, missä d ja d' ovat kummatkin diskreettejä metriikoita. Milloin kuvaus $f\colon X \to Y$ on Lipschitz-kuvaus?

5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $x_0 \in X$. Näytä, että kuvaus

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x_0, x)$$

   on 1-Lipschitz.

6. Anna esimerkki

   (a) jatkuvasta kuvauksesta joka ei ole Lipschitz.

   (b) jatkuvasta kuvauksesta $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ joka ei ole Lipschitz.

7*. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $x_0 \in X$. Näytä, että kuvaus

$$f_a \colon X \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = d(a, x) - d(x, x_0)$$

on jatkuva rajoitettu[1] kuvaus.

Halutessasi voit osoittaa, että kuvaus

$$\phi \colon X \to \mathrm{raj}(X, \mathbb{R}), \quad \phi(a) = f_a$$

on 1-Lipschitz, missä $\mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$ on kaikkien rajoitettujen kuvausten vektoriavaruus varustettuna sup-normin indusoimalla metriikalla.

[1]Kuvausta sanotaan rajoitetuksi kuvaukseksi, mikäli sen kuvajoukko $fX = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ on rajoitettu joukko.