Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
ℝami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Harjoitukset 3 perjantaiksi 21.9.2012. **Korjattu versio.**

Uusia tehtävätyyppejä! Jee!

Lämmittelytehtävät L1.-LN. ovat vapaaehtoisia lämmittelytehtäviä, joista ei kerry laskaripisteitä mutta joita voi ratkoa halutessaan parantaa osaamistaan. Niitä käsitellään ajan salliessa laskuharjoituksissa.

Tähtitehtävä N^* on hieman haastavampi tai abstraktimpi tehtävä, jolla voi halutessaan korvata yhden tavallisen tehtävän. Siitä ei kuitenkaan saa ylimääräisiä laskaripisteitä. Tehtävää käsitellään laskareissa ajan salliessa.

L1. Näytä, että jono $(4 + \frac{1}{n}, \frac{2}{n} - 6)$ suppenee avaruudessa $\mathbb{R}^2$, kun käytössä on

(a) Manhattan-normin indusoima metriikka.

(b) Chebyshev-normin indusoima metriikka.

(c) Näytä, että se ei suppene, kun käytössä on diskreetti metriikka.

L2. Näytä, että jono $(\frac{1}{k}(-1)^k, \frac{1}{k}\sin(k))$ suppenee avaruudessa $\mathbb{R}^2$, kun käytössä on

(a) Manhattan-normin indusoima metriikka.

(b) Chebyshev-normin indusoima metriikka.

(c) Näytä, että se ei suppene, kun käytössä on diskreetti metriikka.

L3. Näytä, etteivät jonot $(n, \frac{1}{n})$ ja $((-2)^k, \frac{5}{n^2})$ suppene avaruudessa $\mathbb{R}^2$, kun käytössä on

(a) Manhattan-normin indusoima metriikka.

(b) Chebyshev-normin indusoima metriikka.

(c) Diskreetti metriikka.

---

1. Piirrä tason yksikköympyrä, kun metriikkana on Chebyshev-normin

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|\}$$

indusoima metriikka.

2. Olkoot (x_n) ja (y_n) jonoja avaruudessa X siten, että $x_n \to a$ ja $y_n \to b$. Todista, että tällöin $d(x_n, y_n) \to d(a, b)$.

3. (a) Onko joukko $]0,1[\times[-1,7] \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu
   (i) Manhattan-normin indusoimassa metriikassa?
   (ii) diskreetissä metriikassa?
   (iii) Euklidisessa metriikassa?

   (b) Laske edellisen kohdan tilanteissa myös halkaisija.

4. Mikä on kuulien $\overline{B}(\mathbf{0},1) \subset \mathbb{R}^2$ ja $\overline{B}((0,k),1)$ etäisyys eri luvuilla $k \in \mathbb{Z}$.

5. Todista, että metrisessä avaruudessa pätee $x_n \to a$ jos ja vain jos $d(x_n, a) \to 0$.

6. Todista, että joukko on rajoitettu jos ja vain jos se sisältyy johonkin kuulaan.

7*. Todista, jos jono (x_n) suppenee, niin joukolle $H_k := \{x_n \mid n \geq k\}$ pätee, että $d(H_k) \to 0$, kun $k \to \infty$.