Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
`rami.luisto@helsinki.fi`

Harjoitustehtävät 2 perjantaiksi 14.09.2012

---

1. Määritellään avaruuteen $\mathbb{R}^n$ 'Manhattan-normi' asettamalla
$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |v_j| \quad \big(= |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \big).$$
Todista, että kyseessä on normi, eli käy läpi normin määritelmän ehdot.

2. Määritellään avaruuteen $\mathbb{R}^n$ 'Chebyshev-normi' asettamalla
$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_j| : j = 1, \cdots, n\} \quad \big(= \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\} \big).$$
Todista, että kyseessä on normi, eli käy läpi normin määritelmän ehdot.

3. Todista, että jatkuvien kuvausten $[0,1] \to \mathbb{R}$ joukossa $C[0,1]$ määriteltävä metriikka
$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$
toteuttaa metriikan ehdot. Kaikkia analyysistä ja lukiosta tuttuja integraalin ominaisuuksia saa käyttää hyödyksi. Vektoriavaruudessa $C[0,1]$ laskutoimitukset määritellään pisteittäin:
   - $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ kaikilla $f, g \in C[0,1]$.
   - $(af)(x) := a(f(x))$ kaikilla $f \in C[0,1]$ ja $a \in \mathbb{R}$.

   Nollavektorina, eli 'origona' toimii vakiokuvaus $x \mapsto 0$.

4. Olkoot $\|\cdot\|_\alpha$ ja $\|\cdot\|_\beta$ normeja avaruudessa V. Osoita, että niiden summa, joka määritellään $\|\mathbf{v}\|_+ = \|\mathbf{v}\|_\alpha + \|\mathbf{v}\|_\beta$ on myös normi.

5. Olkoot d ja e joukon X metriikoita. Osoita, että $d+e$, joka siis määritellään asettamalla
$$(d+e)(x,y) = d(x,y) + e(x,y),$$
on myös metriikka.

6. Oletetaan, että kuvaus $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}_+$ toteuttaa normin ehdot (N1) ja (N3), mutta ehdon (N2) sijasta heikomman ehdon:

   (N2') Kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee, että $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$.

   Todista, että kuvaus
$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$
toteuttaa metriikan ehdot.