Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Metrisen avaruuden osajoukkoon liittyvät avaruuden osat.
Mukana viitteet

Päivitetty 26. marraskuuta 2012.

Jos haluat kerrata kurssin asioita hyvin tehokkaasti (ainakin kohtia eri pistejoukoista ja sulkeumasta) kirjoita lauseiden 6.8., 6.21. sekä 8.3. väittämät paperille lukematta niiden todistuksia kirjasta ja yritä todistaa ne ihan omin käsin. Yritä todistaa jokaista kohtaa vähintään 10 minuuttia ja siten, että vähintään yksi A4-liuska täyttyy yrityksistäsi. Mikäli siltikään et ole saanut todistettu väitettä, niin katso kirjasta yksi rivi todistusta ja yritä sen pohjilta uudestaaan.

Tähän versioon on lisätty viitteitä kirjaan, joiden avulla kirjasta voi paikallistaa todistamiamme lauseita vastaavat käsitteet. Valtaosa sulkeumaan, sisä-, reuna-, ulko-, kasautumis- ja erakkopisteisiin liittyvistä todistamistamme asioista ovat yhdistelmä lauseita 6.8., 6.21. sekä 8.3. Näiden lauseiden *ymmärtäminen* antaa vahvan pohjan moniin kurssin muihin asioihin.

Jonokasautumisarvoihin liittyviin asioihin ei ole viitteitä, koska käsite on kirjan ulkopuolista asiaa, lähinnä sen johdosta, että kyse on 'vain' sulkeumasta metrisissä avaruuksissa. Käsite otettiin tässä käyttöön pedagogisista syistä.

Olkoon (X, d) epätyhjä metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$ mikä tahansa osajoukko. Metrinen avaruus voidaan nyt *osittaa*, eli jakaa erillisiin paloihin, (muunmuassa) seuraavalla kahdella tavalla:

$$X = (\operatorname{int} A) \cup (\partial A) \cup (\operatorname{ext} A)$$

ja

$$X = (\operatorname{kas} A) \cup (\operatorname{er} A) \cup (\operatorname{ext} A),$$

missä esiintyvät käsitteet $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$ määritellään seuraavaksi.

Joukon sisä-, reuna-, ulko-, kasautumis-, sekä erakkopiste.

Määritellään alkuun johdannossa mainitut, joukkoon A liittyvät joukot.

Huomaa, että seuraava sisäpisteiden määritelmä on hyvin lähellä avoimen joukon määritelmää.

Määritelmä 1. Kirjan määritelmä 8.1. Joukon $A \subset X$ *sisäpisteiden joukko*, $\operatorname{int} A$ määritellään asettamalla

$$\operatorname{int} A = \{x \in X \mid \text{ on olemassa pisteen } x \text{ ympäristö } U \text{ siten, että } U \subset A\}.$$

Seuraavaksi määriteltävä joukon reuna on topologiassa erittäin tärkeä apukeino teorian ymmärtämisessä, ja yleisesti matematiikassa hyvin oleellinen käsite.

Määritelmä 2. Kirjan määritelmä 8.1. Joukon $A \subset X$ *reunapisteiden joukko*, ∂A määritellään asettamalla

$$\partial A = \{x \in X \mid U \cap A \neq \emptyset \text{ ja } U \cap \complement A \neq \emptyset \text{ kaikilla pisteen } x \text{ ympäristöillä U }\}.$$

Huomaa, että souraava ulkopisteiden määritelmä on ainakin päältä katsoen hyvin sisäpisteiden määritelmän näköinen.

Määritelmä 3. Kirjan määritelmä 8.1. Joukon $A \subset X$ *ulkopisteiden joukko*, $\operatorname{ext} A$ määritellään asettamalla

$$\operatorname{ext} A = \{x \in X \mid \text{ on olemassa pisteen } x \text{ ympäristö } U \text{ siten, että } U \subset \complement A\}.$$

Seuraavaksi määriteltävät kasautumispisteet ovat niitä avaruuden pisteitä, joita voi 'lähestyä joukon A pisteillä'.

Määritelmä 4. Kirjan määritelmä 6.20. Joukon A *kasautumispisteiden joukko*, $\operatorname{kas} A$[1] määritellään asettamalla

$$\operatorname{kas} A = \{x \in X \mid U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \text{ kaikilla pisteen } x \text{ ympäristöillä U }\}.$$

Seuraavaksi määriteltävien erakkopisteiden nimi on varsin kuvaava. Ne ovat joukon A sellaisia pisteitä jotka ovat joukon muista pisteistä erillään.

Määritelmä 5. Kirjan määritelmä 3.12. Joukon A *erakkopisteiden joukko*, $\operatorname{er} A$[2] määritellään asettamalla

$$A = \{x \in X \mid \text{ on olemassa pisteen } x \text{ ympäristö } U \text{ siten, että } U \cap A = \{x\}\}.$$

Huomautus 6. Huomaa, että $\operatorname{ext} A = \operatorname{int} \complement A$, $\operatorname{int} A = \operatorname{ext} \complement A$, $\operatorname{ext} \emptyset = X$ ja $\operatorname{ext} X = \emptyset$. Lisäksi aina pätee, että $\operatorname{er} A \subset A$ ja $\operatorname{int} A \subset A$.

Katsotaan alkuun muutama esimerkki.

Esimerkki 7. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{R}$ varustettuna Euklidisella metriikalla, ja

[1] Merkintä "$\operatorname{kas} A$" ei ole standardi merkintätapa, älkää käyttäkö muilla kursseilla kertomatta määritelmää.

[2] Merkintä "$\operatorname{er} A$" ei ole standardi merkintätapa, älkää käyttäkö muilla kursseilla kertomatta määritelmää.

(i) $A =]0,1]$

(ii) $A = \mathbb{Q}$

(iii) $A = \mathbb{Z}$.

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	$\operatorname{int} A$	∂A	$\operatorname{ext} A$	$\operatorname{kas} A$	$\operatorname{er} A$
(i)					
(ii)					
(iii)					

Huomaa, että seuraavassa esimerkissä *avaruutena* on $\mathbb{Z}$. Tässä kohtaa pitää unohtaa, että kokonaislukuja voi ajatella reaalilukujen osajoukkona, ja esimerkiksi seuraavan esimerkin tilanteessa

$$B(1,3) = \{-1,0,1,2,3\}$$

ja

$$B(0,\frac{1}{2}) = \{0\}.$$

Esimerkki 8. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{Z}$ varustettuna metriikalla $d(m,n) = |m-n|$ ja

(i) $A = B(\mathbf{0},3)$

(ii) $A = \overline{B}(\mathbf{0},3)$

(iii) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	$\operatorname{int} A$	∂A	$\operatorname{ext} A$	$\operatorname{kas} A$	$\operatorname{er} A$
(i)					
(ii)					
(iii)					

Esimerkki 9. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{R}^2$ varustettuna Euklidisella metriikalla, ja

(i) $A = B(\mathbf{0},1)$

(ii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

(iii) $A = B(\mathbf{0},1) \cup \{(0,\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Piirrä tästä kuva.).

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	$\operatorname{int} A$	∂A	$\operatorname{ext} A$	$\operatorname{kas} A$	$\operatorname{er} A$
(i)					
(ii)					
(iii)					

Esimerkkien jälkeen voimme todistaa muutaman perustuloksen. Aloitetaan johdannossa mainituista osituslauseista.

Seuraava lause 'sanoo', että kaikki avaruuden pisteet ovat joko joukon sisällä (sisäpisteet), joukon ulkopuolella (ulkopisteet) tai joukon reunalla (reunapisteet).

Lause 10. Huomautettu kirjan määritelmässä 8.1. Joukoille $\operatorname{int} A$, ∂A ja $\operatorname{ext} A$ pätee, että $(\operatorname{int} A) \cap (\partial A) = \emptyset$, $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$ ja $(\partial A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$. Lisäksi

$$X = (\operatorname{int} A) \cup (\partial A) \cup (\operatorname{ext} A).$$

Todistus:

Seuraava lause 'sanoo', että kaikki avaruuden pisteet ovat joko kaukana joukosta A (ulkopisteet), tai sitten ne ovat joukon A lähellä, joko niin että ne ovat joukossa A kiinni (kasautumispisteet) tai siitä irrallaan (erakkopisteet).

Lause 11. Kirjan lause 6.21., erakkopisteiden, kasautumispisteiden ja ulkopisteiden määritelmä sekä lause 8.3. Joukoille $\operatorname{kas} A$, $\operatorname{er} A$ ja $\operatorname{ext} A$ pätee, että $(\operatorname{kas} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$, $(\operatorname{kas} A) \cap (\operatorname{er} A) = \emptyset$ ja $(\operatorname{er} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$. Lisäksi

$$X = (\operatorname{kas} A) \cup (\operatorname{er} A) \cup (\operatorname{ext} A).$$

Todistus: Todista.

Lause 12. Seuraa erilaisista esimerkeistä, ei tietääkseni suoraa vaistinetta kirjassa. Mikä tahansa joukoista $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ tai $\operatorname{er} A$ voi olla tyhjä joukko tai koko avaruus.

Todistus: Anna esimerkit.

Lause 13. Lauseet 8.3. ja 6.3. Kaikille joukoille $A \subset X$ pätee, että

$$(\operatorname{int} A) \subset A \subset (\operatorname{int} A) \cup (\partial A)$$

ja

$$(\operatorname{er} A) \subset A \subset (\operatorname{er} A) \cup (\operatorname{kas} A).$$

Todistus: Todista.

Seuraava lause kertoo, että sisä- ja reunapisteet muodostavat oman porukkansa, erakko- ja kasautumispisteet toisen porukan, eikä näillä porukoilla ole vahvaa vuorovaikutusta yksittäisinä joukkoina.

Lause 14. Seuraa erilaisista esimerkeistä, ei tietääkseni suoraa vastinetta kirjassa. Kussakin seuraavista tilanteisa laatikon $\Box$ paikalle voi kirjoittaa minkä tahansa symboleista $=$, $\subsetneq$ tai $\supsetneq$. (Riippuen joukosta A.)

1. $\operatorname{int} A \Box \operatorname{er} A$
2. $\operatorname{int} A \Box \operatorname{kas} A$
3. $\partial A \Box \operatorname{er} A$
4. $\partial A \Box \operatorname{kas} A$

Todistus: Anna esimerkit kaikista eri vaihtoehdoista.

Avoin joukko, suljettu joukko sekä joukon sulkeuma.

Seuraavaksi yhdistetään äskeiset käsitteet tuttuihin ja vähän uudempiin otuksiin.

Määritellään muistin virkistämiseksi avoin joukko.

Määritelmä 15. Kirjan määritelmä 3.1. Joukko $U \subset X$ on *avoin*, jos jokaista pistettä $x \in U$ kohti löytyy sellainen säde r_x, että $B(x, r_x) \subset U$.

Yhtäpitävästi voidaan määritellä, että joukko $U \subset X$ on *avoin*, jos jokaista pistettä $x \in U$ kohti löytyy pisteen x sellainen ympäristö V, että $V \subset U$.

Määritellään seuraavaksi suljetun joukon käsite.

Määritelmä 16. Kirjan määritelmä 6.1. Joukko $V \subset X$ on *suljettu*, mikäli sen komplementti $\complement V = \{x \in X \mid x \notin V\}$ on avoin joukko.

Käsitteet “joukko on avoin” ja “joukko on suljettu eivät ole vastakkaisia käsitteitä. Joukko voi olla avoin muttei suljettu, suljettu muttei avoin, avoin ja suljettu tai ei avoin eikä suljettu.[3]

Seuraavaksi määriteltävä *sulkeuma* eräässä mielessä “lisää” joukkoon kaikki pisteet jotka ovat siinä “kiinni”.

Määritelmä 17. Kirjan määritelmä 6.5. Joukon $W \subset X$ *sulkeuma* $\overline{W}$ määritellellään asettamalla

$$\overline{W} = \{x \in X \mid U \cap W \neq \emptyset \text{ kaikilla pisteen } x \text{ ympäristöillä } U\}.$$

Katsotaan taas muutamaa esimerkkiä.

Esimerkki 18. Onko joukko A avoin tai suljettu ja mikä on sen sulkeuma, kun $X = \mathbb{R}$ varustettuna Euklidisella metriikalla, ja

(i) $A =]0, 1]$.

[3] Kirjasta Munkres - Topology:

> “’How is a set different from a door?’: ’A door must be either open or closed, and cannot be both, while a set can be open, or closed, or both, or neither!’ “

Katso myös http://abstrusegoose.com/394 .

(ii) $A = \mathbb{Q}$.

(iii) $A = \mathbb{Z}$.

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	A avoin?	A suljettu?	Mitä on $\overline{A}$?
(i)			
(ii)			
(iii)			

Huomaa, että seuraavassa esimerkissä *avaruutena* on $\mathbb{Z}$. Tässä kohtaa pitää unohtaa, että kokonaislukuja voi ajatella reaalilukujen osajoukkona, ja esimerkiksi seuraavan esimerkin tilanteessa

$$B(1,3) = \{-1,0,1,2,3\}$$

ja

$$B(0,\frac{1}{2}) = \{0\}.$$

Esimerkki 19. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{Z}$ varustettuna metriikalla $d(m,n) = |m-n|$ ja

(i) $A = B(\mathbf{0},3)$

(ii) $A = \overline{B}(\mathbf{0},3)$

(iii) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	A avoin?	A suljettu?	Mitä on $\overline{A}$?
(i)			
(ii)			
(iii)			

Esimerkki 20. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{R}^2$ varustettuna Euklidisella metriikalla, ja

(i) $A = B(\mathbf{0},1)$

(ii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

(iii) $A = B(\mathbf{0},1) \cup \{(0,\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Piirrä tästä kuva.).

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	A avoin?	A suljettu?	Mitä on $\overline{A}$?
(i)			
(ii)			
(iii)			

Seuraavaksi todistetaan muutama lause. Tässä kohtaa kannattaa verrata esimerkkehin syntyneitä taulukoita, erityisesti miten sisä- ja reunapisteet sekä sulkeuma suhtautuvat siihen, onko joukko avoin tai suljettu.

Sisäpisteiden ja sulkeuman avulla voidaan aina muodostaa avoimia ja suljettuja joukkoja.

Lause 21. Kirjan lauseet 8.3. ja 6.8. Kaikilla joukoilla $A \subset X$ pätee, että

(i) Joukko $\operatorname{int} A$ on avoin.

(ii) Joukko $\overline{A}$ on suljettu.

Todistus: Todista.

Huomautus 22. Huomaa tosin, että vaikka $A \neq \emptyset$ ja $A \neq X$, niin voi päteä $\operatorname{int} A = \emptyset$ ja $\overline{A} = X$. (Tutki vaikka tilannetta) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$.

Aina pätee, että $A \subset (\operatorname{int} A) \cup \partial A$, joten poistamalla joukosta tai sen sulkeumasta reunapisteet saadaan esille joukon sisäpisteet.

Lause 23. Seuraa kirjan lauseesta 8.3. Kaikilla $A \subset X$ pätee, että

$$\operatorname{int} A = \overline{A} \setminus \partial A$$

ja

$$\operatorname{int} A = A \setminus \partial A.$$

Todistus: Todista.

Vastaavasti poistamalla joukon sulkeumasta sisäpisteet saamme aikaan joukon reunan. Tämä seuraa oleellisesti myöhemmästä lauseesta, jonka mukaan $\overline{A} = (\operatorname{int} A) \cup \partial A$.

Lause 24. Kirjan lause 8.3. Kaikilla $A \subset X$ pätee, että

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A.$$

Todistus: Todista.

Avoimuus voidaan nk. *karakterisoida* reunapisteiden avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että saamme avoimuuden määritelmän kanssa yhtäpitäviä väitteitä.

Lause 25. Seuraa kirjan lauseesta 8.3., 6.8., sekä avoimen ja suljetun joukon määritelmästä. Olkoon $U \subset X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

(i) Joukko U on avoin.

(ii) $U \cap \partial U = \emptyset$

(iii) $\partial U \subset \complement U$

(iv) Joukko $\complement U$ on suljettu.

(v) $U = \operatorname{int} U$.

Todistus: Todista.

Myös joukon sulkeutuneisuuden[4] voi karakterisoida reunapisteiden avulla.

Lause 26. Seuraa kirjan lauseista 8.3., 6.8., sekä avoimen ja suljetun joukon määritelmästä. Olkoon $V \subset X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

(i) Joukko V on suljettu.

(ii) $V \cap \partial V = \partial V$

(iii) $\partial V \subset V$

(iv) Joukko $\complement V$ on avoin.

(v) $V = \overline{V}$.

Todistus: Todista.

Joukon sulkeuman voi muodostaa useammalla eri tavalla. Seuraava lause kertoo, että joukon sulkeuma saadaan ottamalla yhdiste niistä avaruuden osista, jotka eivä ole joukosta 'kaukana'.

Lause 27. Seuraa lauseista 6.8., 6.21. sekä 8.3. Olkoon $W \subset X$. Tällöin pätee

(i) $\overline{W} = \operatorname{int} W \cup \partial W$.

(ii) $\overline{W} = W \cup \partial W$.

(iii) $\overline{W} = \operatorname{kas} W \cup \operatorname{er} W$.

(iv) $\overline{W} = \operatorname{kas} W \cup W$.

(v) $\overline{W} = \complement(\operatorname{ext} W)$.

Todistus: Todista.

Seuraava lause antaa erään motivaation sulkeuman määritelmälle.

Lause 28. Kirjan lause 6.8. Joukon $W \subset X$ sulkeuma $\overline{W}$ on *pienin suljettu joukko joka sisältää joukon W*. Tämä tarkoittaa sitä, että seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

(i) Joukko $\overline{W}$ on suljettu joukko.

(ii) $W \subset \overline{W}$.

(iii) Jos $B \subset X$ on suljettu joukko ja $W \subset B$, niin $\overline{W} \subset B$.

Todistus: Todista.

Edellisellä lauseella voi myös karakterisoida sulkeuman.

[4] Tämä ei ole tarkalleen ottaen sana.

Lause 29. Ei suoraa vastinetta kirjassa, mutta seuraa oleellisesti lauseestia 6.8. Olkoon $W \subset X$ ja $\widetilde{W}$ joukko, jolle pätee että

(i) Joukko $\widetilde{W}$ on suljettu joukko.

(ii) $W \subset \widetilde{W}$.

(iii) Jos $B \subset X$ on suljettu joukko ja $W \subset B$, niin $\widetilde{W} \subset B$.

Tällöin $\widetilde{W} = \overline{W}$.

Todistus: Todista.

Edellisestä kahdesta lauseesta seuraa seuraava lause.

Lause 30. Seuraa lauseista 6.8. ja 6.11. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\overline{W} = \bigcap \{V \subset X \mid V \text{ suljettu}, W \subset V\}$$

Todistus: Todista.

Sulkeuman voi määritellä myös metriikan avulla seuraavasti.

Lause 31. Lause 6.11. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\overline{W} = \{x \in X \mid d(x, W) = 0\}$$

Todistus: Todista.

Voimme kirjoittaa sulkeuman myös joukon ympäristöjen avulla. Muista, että jos $A \subset X$ on joukko, niin

$$B(A, r) = \{x \in X \mid d(x, A) < r\}.$$

Lause 32. Seuraa lauseesta 6.11. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\overline{W} = \bigcap_{r>0} B(W, r).$$

Todistus: Todista.

Meidän riittää ottaa 'pelkästään' numeroituvasti ääretön määrä kuulaympäristöjä kun määrittelemme sulkeuman.

Lause 33. Seuraa lauseesta 6.11. sekä avoimen joukon määritelmästä. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\overline{W} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(W, \frac{1}{n}).$$

Todistus: Todista.

Äskeiset sulkeumaan liittyvät lauseet voi 'tulkata' myös avoimille joukoille.

Lause 34. Lause 8.3. Joukon $W \subset X$ sisäpisteiden joukko $\operatorname{int} W$ on *suurin avoin joukko joka sisältyy joukkoon* W. Tämä tarkoittaa sitä, että seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

(i) Joukko $\operatorname{int} W$ on avoin joukko.

(ii) $W \supset \operatorname{int} W$.

(iii) Jos $B \subset X$ on avoin joukko ja $W \supset B$, niin int $\supset B$.

Todistus: Todista.

Edellisellä lauseella voi myös karakterisoida sisäpisteet

Lause 35. Ei suoraa vastinetta kirjassa, mutta seuraa lauseesta 8.3. Olkoon $W \subset X$ ja $\widetilde{W}$ joukko, jolle pätee että

(i) Joukko $\widetilde{W}$ on avoin joukko.

(ii) $W \supset \widetilde{W}$.

(iii) Jos $B \subset X$ on avoin joukko ja $W \supset B$, niin $\widetilde{W} \supset B$.

Tällöin $\widetilde{W} = \operatorname{int} W$.

Todistus: Todista.

Edellisestä kahdesta lauseesta seuraa seuraava lause.

Lause 36. Ei suoraa vastinetta kirjassa, mutta seuraa lauseesta 8.3. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} W = \bigcup \{V \subset X \mid V \text{ avoin, } W \supset V\}$$

Todistus: Todista.

Sisäpisteet voi määritellä myös metriikan avulla seuraavasti.

Lause 37. Ei suoraa vastinetta kirjassa, mutta seuraa lauseesta 8.3. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} W = \{x \in X \mid d(x, \complement W) > 0\}$$

Todistus: Todista.

Voimme kirjoittaa sisäpisteiden joukon myös seuraavan lauseen antamalla tavalla.

Lause 38. Ei suoraa vastinetta kirjassa, mutta seuraa lauseesta 8.3. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} W = \bigcup_{r>0} \{x \in X \mid d(x, \complement W) > r\}$$

Todistus: Todista.

Meidän riittää ottaa 'pelkästään' numeroituvasti ääretön määrä kuulaympäristöjä kun määrittelemme sisäpisteet.

Lause 39. Ei suoraa vastinetta kirjassa, mutta seuraa lauseesta 8.3. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid d(x, \complement W) > \frac{1}{n}\}$$

Todistus: Todista.

Jonojen yhteys kasautumispisteisiin ja sulkeumaan.

Tässä pykälässä haluamme oppia puhumaan tähän asti opituista käsitteistä jonojen avulla. 'Maalinamme' on todistaa seuraava lause:

Lause 40. Yhdiste lauseista 6.8. ja 6.21. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Joukko A on suljettu jos ja vain jos A sisältää kaikkien suppenevien jonojensa raja-arvot.

Lauseen jälkimmäinen ehto tarkoittaa sitä, että aina kun (x_n) on jono jonka jäsenet sisältyvät joukkoon A ja joka suppenee avaruudessa X kohti pistettä $x_0 \in X$, niin $x_0 \in A$.

Lauseen voisi todistaa suoraan käyttäen suljetun joukon määritelmää, (olemme tämän käytännössä jo kurssilla tehneet) mutta todistetaan väite määrittelememmiemme kasautumispisteiden ja erakkopisteiden avulla. Lause seuraa kun todistamme seuraavan lauseen:

Lause 41. Lause 11.6. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{ on olemassa jono } (x_n) \subset A \text{ siten että } x_n \to x\}.$$

Kerrataan suppenevan jonon määritelmä, korostaen tämän luvun kannalta tärkeää kohtaa.

Määritelmä 42. Olkoon X metrinen avaruus ja $(x_n) \subset X$ jono. Jono (x_n) suppenee, **jos on olemassa avaruuden X piste** x_0 siten, että jokaista pisteen x_0 ympäristöä U kohti löytyy sellainen indeksi $n_U \in \mathbb{N}$, että $x_n \in U$ kaikilla $n \geq n_U$.

Esimerkiksi jos avaruutemme X on väli $]0,1[$ varustettuna Euklidisella metriikalla ja jonomme (x_n) on muotoa $x_n = \frac{1}{n}$, niin jono (x_n) **ei suppene avaruudessa X.**

Määritelmä 43. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Joukon A *jonokasautumispisteiden joukko* [5] on joukko

$$\operatorname{Jkas} A = \{x \in X \mid \text{ on olemassa jono } (x_n) \subset A, x_n \to x\}.$$

Lause 44. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{Jkas} A \subset \complement \operatorname{ext} A.$$

Todistus: Todista.

Lause 45. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{Jkas} A \subset \overline{A}$$

Todistus: Todista.

[5]Ihan ikioma määritelmä, älkää käyttäkö kurssin ulkopuolella kertomatta määritelmää.

Lause 46. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{er} A \subset \operatorname{Jkas} A$$

ja

$$\operatorname{kas} A \subset \operatorname{Jkas} A.$$

Todistus: Todista.

Lause 47. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin $\overline{A} \subset \operatorname{Jkas} A$.

Todistus: Todista.

Lause 48. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Joukko A on suljettu jos ja vain jos A sisältää kaikkien suppenevien jonojensa raja-arvot.

Todistus: Todista.

Loppuun pari sanaa jonon kasautumisarvoista, jotka määriteltiin seuraavasti:

Määritelmä 49. Olkoon $(x_n) \subset X$ jono. Piste $a \in X$ on jonon (x_n) kasautumisarvo, mikäli jokaiselle pisteen a ympäristölle U pätee, että $x_n \in U$ mielivaltaisen suurilla indekseillä n.

Seuraavien kahden lauseen johdosta huomaamme, että itse asiassa

$$\operatorname{Jkas} A = \{x \in X \mid \text{ piste } x \text{ on jonkin jonon } (x_n) \subset A \text{ kasautumispiste}\}.$$

Lause 50. Olkoon (x_n) metrisen avaruuden X jono. Tällöin piste $a \in X$ on jonon (x_n) kasautumisarvo jos ja vain jos on olemassa jonon (x_n) osajono (y_n) joka suppenee kohti pistettä a.

Lause 51. Olkoon (x_n) metrisen avaruuden X jono. Piste $x \in X$ on jonon (x_n) kasautumispiste jos ja vain jos se on joukon $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kasautumisarvo tai jos jonolla (x_n) on sellainen osajono (y_n), että $y_k = x$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Erityisesti puhuttaessa suljettujen joukkojen jonokarakterisaatiosta ei usein ole väliä, että käytetäänkö jonojen raja-arvoja vai kasautumispisteitä.

Yhteys joukko-opin operaatioihin

Ihan loppuun vähän yhteyksiä joukko-opin operaatioiden $\cup$ ja $\cap$ sekä määriteltyjen joukkojen välille. Vapaaehtoista puuhattavaa: jos haluaa treenata osaamistaan, niin voi todistaa jokaisen yhtäsuuruuden tai inkluusion ja esittää esimerkeillä miksi inkluusio voi olla aito.

Lause 52. Muutama kohta seuraa lauseesta 6.8. ja joukko-opista, loput määritelmistä. (Vaativat silti ajattelua.) Kaikille joukoilla $A, B \subset X$ pätee, että

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(iii) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

(iv) $\partial(A \cap B) \supset \partial A \cap \partial B$

(v) $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$

(vi) $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

(vii) $\operatorname{ext}(A \cup B) \subset \operatorname{ext} A \cup \operatorname{ext} B$

(viii) $\operatorname{ext}(A \cap B) \supset \operatorname{ext} A \cap \operatorname{ext} B$

(ix) $\operatorname{kas}(A \cup B) = \operatorname{kas} A \cup \operatorname{kas} B$

(x) $\operatorname{kas}(A \cap B) \subset \operatorname{kas} A \cap \operatorname{kas} B$

(xi) $\operatorname{er}(A \cup B) \subset \operatorname{er} A \cup \operatorname{er} B$

(xii) $\operatorname{er}(A \cap B) \supset \operatorname{er} A \cap \operatorname{er} B$