Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
ℝami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Metrisen avaruuden osajoukkoon liittyvät avaruuden osat.

Päivitetty 12. marraskuuta 2012.

Tämän monisteen sisältö käsitellään nyt kakkosperiodin alussa. Todistukset lauseille tehdään luennoilla, pienryhmissä, itse tai laskareissa. En kirjoita todistuksia minnekään kirjallisesti ylös, mutta todistukset löytyvät muodossa tai toisessa kirjasta. Ideana on, että saatte itse täydentää todistukset ja esimerkkien yksityiskohdat luentojen, kirjan ja erityisesti oman työn kautta. Valtaosa ensi viikon laskuharjoituksista ja ainakin yksi koetehtävä tulevat tämän monisteen lauseista ja/tai esimerkeistä.

Poislukien avoimuuden määritelmä, niin seuraavassa esitettävistä käsitteistä **ehdottomasti tärkein on reunapisteen käsite**. Reunan ymmärtäminen auttaa uskomattoman paljon topologian ymmärtämisessä. Hyvin tärkeä käsite on myös joukon sulkeuma, mutta kuten huomaamme, niin joukon sulkeuma saadaan lisäämällä joukkoon sen reunapisteet.

Olkoon (X, d) epätyhjä metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$ mikä tahansa osajoukko. Metrinen avaruus voidaan nyt *osittaa*, eli jakaa erillisiin paloihin, (muunmuassa) seuraavalla kahdella tavalla:

$$X = (\operatorname{int} A) \cup (\partial A) \cup (\operatorname{ext} A)$$

ja

$$X = (\operatorname{kas} A) \cup (\operatorname{er} A) \cup (\operatorname{ext} A),$$

missä esiintyvät käsitteet $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$ määritellään seuraavaksi.

Joukon sisä-, reuna-, ulko-, kasautumis-, sekä erakkopiste.

Määritellään alkuun johdannossa mainitut, joukkoon A liittyvät joukot.

Huomaa, että seuraava sisäpisteiden määritelmä on hyvin lähellä avoimen joukon määritelmää.

Määritelmä 1. Joukon $A \subset X$ *sisäpisteiden joukko*, $\operatorname{int} A$ määritellään asettamalla

$$\operatorname{int} A = \{x \in X \mid \text{ on olemassa pisteen } x \text{ ympäristö } U \text{ siten, että } U \subset A\}.$$

Seuraavaksi määriteltävä joukon reuna on topologiassa erittäin tärkeä apukeino teorian ymmärtämisessä, ja yleisesti matematiikassa hyvin oleellinen käsite.

Määritelmä 2. Joukon $A \subset X$ *reunapisteiden joukko*, ∂A määritellään asettamalla

$$\partial A = \{x \in X \mid U \cap A \neq \emptyset \text{ ja } U \cap \complement A \neq \emptyset \text{ kaikilla pisteen } x \text{ ympäristöillä U }\}.$$

Huomaa, että souraava ulkopisteiden määritelmä on ainakin päältä katsoen hyvin sisäpisteiden määritelmän näköinen.

Määritelmä 3. Joukon $A \subset X$ *ulkopisteiden joukko*, $\operatorname{ext} A$ määritellään asettamalla

$$\operatorname{ext} A = \{x \in X \mid \text{ on olemassa pisteen } x \text{ ympäristö } U \text{ siten, että } U \subset \complement A\}.$$

Seuraavaksi määriteltävät kasautumispisteet ovat niitä avaruuden pisteitä, joita voi 'lähestyä joukon A pisteillä'.

Määritelmä 4. Joukon A *kasautumispisteiden joukko*, $\operatorname{kas} A$[1] määritellään asettamalla

$$\operatorname{kas} A = \{x \in X \mid U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \text{ kaikilla pisteen } x \text{ ympäristöillä U }\}.$$

Seuraavaksi määriteltävien erakkopisteiden nimi on varsin kuvaava. Ne ovat joukon A sellaisia pisteitä jotka ovat joukon muista pisteistä erillään.

Määritelmä 5. Joukon A *erakkopisteiden joukko*, $\operatorname{er} A$[2] määritellään asettamalla

$$A = \{x \in X \mid \text{ on olemassa pisteen } x \text{ ympäristö } U \text{ siten, että } U \cap A = \{x\}\}.$$

Huomautus 6. Huomaa, että $\operatorname{ext} A = \operatorname{int} \complement A$, $\operatorname{int} A = \operatorname{ext} \complement A$, $\operatorname{ext} \emptyset = X$ ja $\operatorname{ext} X = \emptyset$. Lisäksi aina pätee, että $\operatorname{er} A \subset A$ ja $\operatorname{int} A \subset A$.

Katsotaan alkuun muutama esimerkki.

Esimerkki 7. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{R}$ varustettuna Euklidisella metriikalla, ja

(i) $A =]0, 1]$

(ii) $A = \mathbb{Q}$

(iii) $A = \mathbb{Z}$.

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

[1] Merkintä "$\operatorname{kas} A$" ei ole standardi merkintätapa, älkää käyttäkö muilla kursseilla kertomatta määritelmää.

[2] Merkintä "$\operatorname{er} A$" ei ole standardi merkintätapa, älkää käyttäkö muilla kursseilla kertomatta määritelmää.

	int A	∂A	ext A	kas A	er A
(i)					
(ii)					
(iii)					

Huomaa, että seuraavassa esimerkissä *avaruutena* on $\mathbb{Z}$. Tässä kohtaa pitää unohtaa, että kokonaislukuja voi ajatella reaalilukujen osajoukkona, ja esimerkiksi seuraavan esimerkin tilanteessa

$$B(1,3) = \{-1,0,1,2,3\}$$

ja

$$B(0,\frac{1}{2}) = \{0\}.$$

Esimerkki 8. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{Z}$ varustettuna metriikalla $d(m,n) = |m-n|$ ja

(i) $A = B(\mathbf{0},3)$

(ii) $A = \overline{B}(\mathbf{0},3)$

(iii) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	int A	∂A	ext A	kas A	er A
(i)					
(ii)					
(iii)					

Esimerkki 9. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{R}^2$ varustettuna Euklidisella metriikalla, ja

(i) $A = B(\mathbf{0},1)$

(ii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

(iii) $A = B(\mathbf{0},1) \cup \{(0,\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Piirrä tästä kuva.).

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	int A	∂A	ext A	kas A	er A
(i)					
(ii)					
(iii)					

Esimerkkien jälkeen voimme todistaa muutaman perustuloksen. Aloitetaan johdannossa mainituista osituslauseista.

Seuraava lause 'sanoo', että kaikki avaruuden pisteet ovat joko joukon sisällä (sisäpisteet), joukon ulkopuolella (ulkopisteet) tai joukon reunalla (reunapisteet).

Lause 10. Joukoille $\operatorname{int} A$, ∂A ja $\operatorname{ext} A$ pätee, että $(\operatorname{int} A) \cap (\partial A) = \emptyset$, $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$ ja $(\partial A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$. Lisäksi

$$X = (\operatorname{int} A) \cup (\partial A) \cup (\operatorname{ext} A).$$

Todistus:

Seuraava lause 'sanoo', että kaikki avaruuden pisteet ovat joko kaukana joukosta A (ulkopisteet), tai sitten ne ovat joukon A lähellä, joko niin että ne ovat joukossa A kiinni (kasautumispisteet) tai siitä irrallaan (erakkopisteet).

Lause 11. Joukoille $\operatorname{kas} A$, $\operatorname{er} A$ ja $\operatorname{ext} A$ pätee, että $(\operatorname{kas} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$, $(\operatorname{kas} A) \cap (\operatorname{er} A) = \emptyset$ ja $(\operatorname{er} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$. Lisäksi

$$X = (\operatorname{kas} A) \cup (\operatorname{er} A) \cup (\operatorname{ext} A).$$

Todistus: Todista.

Lause 12. Mikä tahansa joukoista $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ tai $\operatorname{er} A$ voi olla tyhjä joukko tai koko avaruus.

Todistus: Anna esimerkit.

Lause 13. Kaikille joukoille $A \subset X$ pätee, että

$$(\operatorname{int} A) \subset A \subset (\operatorname{int} A) \cup (\partial A)$$

ja

$$(\operatorname{er} A) \subset A \subset (\operatorname{er} A) \cup (\operatorname{kas} A).$$

Todistus: Todista.

Seuraava lause kertoo, että sisä- ja reunapisteet muodostavat oman porukkansa, erakko- ja kasautumispisteet toisen porukan, eikä näillä porukoilla ole vahvaa vuorovaikutusta yksittäisinä joukkoina.

Lause 14. Kussakin seuraavista tilanteisa laatikon $\square$ paikalle voi kirjoittaa minkä tahansa symboleista $=$, $\subsetneq$ tai $\supsetneq$. (Riippuen joukosta A.)

1. $\operatorname{int} A \square \operatorname{er} A$

2. $\operatorname{int} A \square \operatorname{kas} A$

3. $\partial A \square \operatorname{er} A$

4. $\partial A \square \operatorname{kas} A$

Todistus: Anna esimerkit kaikista eri vaihtoehdoista.

Avoin joukko, suljettu joukko sekä joukon sulkeuma.

Seuraavaksi yhdistetään äskeiset käsitteet tuttuihin ja vähän uudempiin otuksiin.

Määritellään muistin virkistämiseksi avoin joukko.

Määritelmä 15. Joukko $U \subset X$ on *avoin*, jos jokaista pistettä $x \in U$ kohti löytyy sellainen säde r_x, että $B(x, r_x) \subset U$.

Yhtäpitävästi voidaan määritellä, että joukko $U \subset X$ on *avoin*, jos jokaista pistettä $x \in U$ kohti löytyy pisteen x sellainen ympäristö V, että $V \subset U$.

Määritellään seuraavaksi suljetun joukon käsite.

Määritelmä 16. Joukko $V \subset X$ on *suljettu*, mikäli sen komplementti $\complement V = \{x \in X \mid x \notin V\}$ on avoin joukko.

Käsitteet "joukko on avoin" ja "joukko on suljettu eivät ole vastakkaisia käsitteitä. Joukko voi olla avoin muttei suljettu, suljettu muttei avoin, avoin ja suljettu tai ei avoin eikä suljettu.[3]

Seuraavaksi määriteltävä *sulkeuma* eräässä mielessä "lisää" joukkoon kaikki pisteet jotka ovat siinä "kiinni".

Määritelmä 17. Joukon $W \subset X$ *sulkeuma* $\overline{W}$ määritellellään asettamalla

$$\overline{W} = \{x \in X \mid U \cap W \neq \emptyset \text{ kaikilla pisteen } x \text{ ympäristöillä } U\}.$$

Katsotaan taas muutamaa esimerkkiä.

Esimerkki 18. Onko joukko A avoin tai suljettu ja mikä on sen sulkeuma, kun $X = \mathbb{R}$ varustettuna Euklidisella metriikalla, ja

(i) $A =]0, 1]$.

(ii) $A = \mathbb{Q}$.

(iii) $A = \mathbb{Z}$.

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	A avoin?	A suljettu?	Mitä on $\overline{A}$?
(i)			
(ii)			
(iii)			

Huomaa, että seuraavassa esimerkissä *avaruutena* on $\mathbb{Z}$. Tässä kohtaa pitää unohtaa, että kokonaislukuja voi ajatella reaalilukujen osajoukkona, ja esimerkiksi seuraavan esimerkin tilanteessa

$$B(1, 3) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

ja

$$B(0, \frac{1}{2}) = \{0\}.$$

Esimerkki 19. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{Z}$ varustettuna metriikalla $d(m, n) = |m - n|$ ja

(i) $A = B(\mathbf{0}, 3)$

(ii) $A = \overline{B}(\mathbf{0}, 3)$

[3] Kirjasta Munkres - Topology:

> "'How is a set different from a door?': 'A door must be either open or closed, and cannot be both, while a set can be open, or closed, or both, or neither!' "

Katso myös http://abstrusegoose.com/394 .

(iii) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	A avoin?	A suljettu?	Mitä on $\overline{A}$?
(i)			
(ii)			
(iii)			

Esimerkki 20. Määritetään (kuvaa katsomalla) joukot $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{kas} A$ ja $\operatorname{er} A$, kun $X = \mathbb{R}^2$ varustettuna Euklidisella metriikalla, ja

(i) $A = B(\mathbf{0}, 1)$

(ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

(iii) $A = B(\mathbf{0}, 1) \cup \{(0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Piirrä tästä kuva.).

Voit halutessasi kirjata tulokset ylös oheiseen taulukkoon.

	A avoin?	A suljettu?	Mitä on $\overline{A}$?
(i)			
(ii)			
(iii)			

Seuraavaksi todistetaan muutama lause. Tässä kohtaa kannattaa verrata esimerkkehin syntyneitä taulukoita, erityisesti miten sisä- ja reunapisteet sekä sulkeuma suhtautuvat siihen, onko joukko avoin tai suljettu.

Sisäpisteiden ja sulkeuman avulla voidaan aina muodostaa avoimia ja suljettuja joukkoja.

Lause 21. Kaikilla joukoilla $A \subset X$ pätee, että

(i) Joukko $\operatorname{int} A$ on avoin.

(ii) Joukko $\overline{A}$ on suljettu.

Todistus: Todista.

Huomautus 22. Huomaa tosin, että vaikka $A \neq \emptyset$ ja $A \neq X$, niin voi päteä $\operatorname{int} A = \emptyset$ ja $\overline{A} = X$. (Tutki vaikka tilannetta) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$.

Aina pätee, että $A \subset (\operatorname{int} A) \cup \partial A$, joten poistamalla joukosta tai sen sulkeumasta reunapisteet saadaan esille joukon sisäpisteet.

Lause 23. Kaikilla $A \subset X$ pätee, että

$$\operatorname{int} A = \overline{A} \setminus \partial A$$

ja

$$\operatorname{int} A = A \setminus \partial A.$$

Todistus: Todista.

Vastaavasti poistamalla joukon sulkeumasta sisäpisteet saamme aikaan joukon reunan. Tämä seuraa oleellisesti myöhemmästä lauseesta, jonka mukaan $\overline{A} = (\operatorname{int} A) \cup \partial A$.

Lause 24. Kaikilla $A \subset X$ pätee, että

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A.$$

Todistus: Todista.

Avoimuus voidaan nk. *karakterisoida* reunapisteiden avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että saamme avoimuuden määritelmän kanssa yhtäpitäviä väitteitä.

Lause 25. Olkoon $U \subset X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

(i) Joukko U on avoin.

(ii) $U \cap \partial U = \emptyset$

(iii) $\partial U \subset \complement U$

(iv) Joukko $\complement U$ on suljettu.

(v) $U = \operatorname{int} U$.

Todistus: Todista.

Myös joukon sulkeutuneisuuden[4] voi karakterisoida reunapisteiden avulla.

Lause 26. Olkoon $V \subset X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

(i) Joukko V on suljettu.

(ii) $V \cap \partial V = \partial V$

(iii) $\partial V \subset V$

(iv) Joukko $\complement V$ on avoin.

(v) $V = \overline{V}$.

[4]Tämä ei ole tarkalleen ottaen sana.

Todistus: Todista.

Joukon sulkeuman voi muodostaa useammalla eri tavalla. Seuraava lause kertoo, että joukon sulkeuma saadaan ottamalla yhdiste niistä avaruuden osista, jotka eivä ole joukosta 'kaukana'.

Lause 27. Olkoon $W \subset X$. Tällöin pätee

(i) $\overline{W} = \operatorname{int} W \cup \partial W$.

(ii) $\overline{W} = W \cup \partial W$.

(iii) $\overline{W} = \operatorname{kas} W \cup \operatorname{er} W$.

(iv) $\overline{W} = \operatorname{kas} W \cup W$.

(v) $\overline{W} = \complement(\operatorname{ext} W)$.

Todistus: Todista.

Seuraava lause antaa erään motivaation sulkeuman määritelmälle.

Lause 28. Joukon $W \subset X$ sulkeuma $\overline{W}$ on *pienin suljettu joukko joka sisältää joukon* W. Tämä tarkoittaa sitä, että seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

(i) Joukko $\overline{W}$ on suljettu joukko.

(ii) $W \subset \overline{W}$.

(iii) Jos $B \subset X$ on suljettu joukko ja $W \subset B$, niin $\overline{W} \subset B$.

Todistus: Todista.

Edellisellä lauseella voi myös karakterisoida sulkeuman.

Lause 29. Olkoon $W \subset X$ ja $\widetilde{W}$ joukko, jolle pätee että

(i) Joukko $\widetilde{W}$ on suljettu joukko.

(ii) $W \subset \widetilde{W}$.

(iii) Jos $B \subset X$ on suljettu joukko ja $W \subset B$, niin $\widetilde{W} \subset B$.

Tällöin $\widetilde{W} = \overline{W}$.

Todistus: Todista.

Edellisestä kahdesta lauseesta seuraa seuraava lause.

Lause 30. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\overline{W} = \bigcap \{V \subset X \mid V \text{ suljettu}, W \subset V\}$$

Todistus: Todista.

Sulkeuman voi määritellä myös metriikan avulla seuraavasti.

Lause 31. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\overline{W} = \{x \in X \mid d(x, W) = 0\}$$

Todistus: Todista.

Voimme kirjoittaa sulkeuman myös joukon ympäristöjen avulla. Muista, että jos $A \subset X$ on joukko, niin

$$B(A, r) = \{x \in X \mid d(x, A) < r\}.$$

Lause 32. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\overline{W} = \bigcap_{r>0} B(W, r).$$

Todistus: Todista.

Meidän riittää ottaa 'pelkästään' numeroituvasti ääretön määrä kuulaympäristöjä kun määrittelemme sulkeuman.

Lause 33. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\overline{W} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(W, \frac{1}{n}).$$

Todistus: Todista.

Äskeiset sulkeumaan liittyvät lauseet voi 'tulkata' myös avoimille joukoille.

Lause 34. Joukon $W \subset X$ sisäpisteiden joukko $\operatorname{int} W$ on *suurin avoin joukko joka sisältyy joukkoon* W. Tämä tarkoittaa sitä, että seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

(i) Joukko $\operatorname{int} W$ on avoin joukko.

(ii) $W \supset \operatorname{int} W$.

(iii) Jos $B \subset X$ on avoin joukko ja $W \supset B$, niin $\operatorname{int} \supset B$.

Todistus: Todista.

Edellisellä lauseella voi myös karakterisoida sisäpisteet

Lause 35. Olkoon $W \subset X$ ja $\widetilde{W}$ joukko, jolle pätee että

(i) Joukko $\widetilde{W}$ on avoin joukko.

(ii) $W \supset \widetilde{W}$.

(iii) Jos $B \subset X$ on avoin joukko ja $W \supset B$, niin $\widetilde{W} \supset B$.

Tällöin $\widetilde{W} = \operatorname{int} W$.

Todistus: Todista.

Edellisestä kahdesta lauseesta seuraa seuraava lause.

Lause 36. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} W = \bigcup \{V \subset X \mid V \text{ avoin}, W \supset V\}$$

Todistus: Todista.

Sisäpisteet voi määritellä myös metriikan avulla seuraavasti.

Lause 37. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} W = \{x \in X \mid d(x, \complement W) > 0\}$$

Todistus: Todista.

Voimme kirjoittaa sisäpisteiden joukon myös seuraavan lauseen antamalla tavalla.

Lause 38. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} W = \bigcup_{r>0} \{x \in X \mid d(x, \complement W) > r\}$$

Todistus: Todista.

Meidän riittää ottaa 'pelkästään' numeroituvasti ääretön määrä kuulaympäristöjä kun määrittelemme sisäpisteet.

Lause 39. Olkoon $W \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{int} W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid d(x, \complement W) > \frac{1}{n}\}$$

Todistus: Todista.

Jonojen yhteys kasautumispisteisiin ja sulkeumaan.

Tässä pykälässä haluamme oppia puhumaan tähän asti opituista käsitteistä jonojen avulla. 'Maalinamme' on todistaa seuraava lause:

Lause 40. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Joukko A on suljettu jos ja vain jos A sisältää kaikkien suppenevien jonojensa raja-arvot.

Lauseen jälkimmäinen ehto tarkoittaa sitä, että aina kun (x_n) on jono jonka jäsenet sisältyvät joukkoon A ja joka suppenee avaruudessa X kohti pistettä $x_0 \in X$, niin $x_0 \in A$.

Lauseen voisi todistaa suoraan käyttäen suljetun joukon määritelmää, (olemme tämän käytännössä jo kurssilla tehneet) mutta todistetaan väite määrittelememmiemme kasautumispisteiden ja erakkopisteiden avulla. Lause seuraa kun todistamme seuraavan lauseen:

Lause 41. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{ on olemassa jono } (x_n) \subset A \text{ siten että } x_n \to x\}.$$

Kerrataan suppenevan jonon määritelmä, korostaen tämän luvun kannalta tärkeää kohtaa.

Määritelmä 42. Olkoon X metrinen avaruus ja $(x_n) \subset X$ jono. Jono (x_n) suppenee, **jos on olemassa avaruuden X piste** x_0 siten, että jokaista pisteen x_0 ympäristöä U kohti löytyy sellainen indeksi $n_U \in \mathbb{N}$, että $x_n \in U$ kaikilla $n \geq n_U$.

Esimerkiksi jos avaruutemme X on väli $]0,1[$ varustettuna Euklidisella metriikalla ja jonomme (x_n) on muotoa $x_n = \frac{1}{n}$, niin jono (x_n) **ei suppene avaruudessa X.**

Määritelmä 43. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Joukon A *jonokasautumispisteiden joukko* [5] on joukko

$$\operatorname{Jkas} A = \{x \in X \mid \text{ on olemassa jono } (x_n) \subset A, x_n \to x\}.$$

Lause 44. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{Jkas} A \subset \complement \operatorname{ext} A.$$

Todistus: Todista.

[5] Ihan ikioma määritelmä, älkää käyttäkö kurssin ulkopuolella kertomatta määritelmää.

Lause 45. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{Jkas} A \subset \overline{A}$$

Todistus: Todista.

Lause 46. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin

$$\operatorname{er} A \subset \operatorname{Jkas} A$$

ja

$$\operatorname{kas} A \subset \operatorname{Jkas} A.$$

Todistus: Todista.

Lause 47. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin $\overline{A} \subset \operatorname{Jkas} A$.

Todistus: Todista.

Lause 48. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Joukko A on suljettu jos ja vain jos A sisältää kaikkien suppenevien jonojensa raja-arvot.

Todistus: Todista.

Loppuun pari sanaa jonon kasautumisarvoista, jotka määriteltiin seuraavasti:

Määritelmä 49. Olkoon $(x_n) \subset X$ jono. Piste $a \in X$ on jonon (x_n) kasautumisarvo, mikäli jokaiselle pisteen a ympäristölle U pätee, että $x_n \in U$ mielivaltaisen suurilla indekseillä n.

Seuraavien kahden lauseen johdosta huomaamme, että itse asiassa

$$\text{Jkas}\, A = \{x \in X \mid \text{ piste } x \text{ on jonkin jonon } (x_n) \subset A \text{ kasautumispiste}\}.$$

Lause 50. Olkoon (x_n) metrisen avaruuden X jono. Tällöin piste $a \in X$ on jonon (x_n) kasautumisarvo jos ja vain jos on olemassa jonon (x_n) osajono (y_n) joka suppenee kohti pistettä a.

Lause 51. Olkoon (x_n) metrisen avaruuden X jono. Piste $x \in X$ on jonon (x_n) kasautumispiste jos ja vain jos se on joukon $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kasautumisarvo tai jos jonolla (x_n) on sellainen osajono (y_n), että $y_k = x$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Erityisesti puhuttaessa suljettujen joukkojen jonokarakterisaatiosta ei usein ole väliä, että käytetäänkö jonojen raja-arvoja vai kasautumispisteitä.

Yhteys joukko-opin operaatioihin

Ihan loppuun vähän yhteyksiä joukko-opin operaatioiden $\cup$ ja $\cap$ sekä määriteltyjen joukkojen välille. Vapaaehtoista puuhattavaa: jos haluaa treenata osaamistaan, niin voi todistaa jokaisen yhtäsuuruuden tai inkluusion ja esittää esimerkeillä miksi inkluusio voi olla aito.

Lause 52. Kaikille joukoilla $A, B \subset X$ pätee, että

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(iii) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

(iv) $\partial(A \cap B) \supset \partial A \cap \partial B$

(v) $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$

(vi) $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

(vii) $\operatorname{ext}(A \cup B) \subset \operatorname{ext} A \cup \operatorname{ext} B$

(viii) $\operatorname{ext}(A \cap B) \supset \operatorname{ext} A \cap \operatorname{ext} B$

(ix) $\operatorname{kas}(A \cup B) = \operatorname{kas} A \cup \operatorname{kas} B$

(x) $\operatorname{kas}(A \cap B) \subset \operatorname{kas} A \cap \operatorname{kas} B$

(xi) $\operatorname{er}(A \cup B) \subset \operatorname{er} A \cup \operatorname{er} B$

(xii) $\operatorname{er}(A \cap B) \supset \operatorname{er} A \cap \operatorname{er} B$