Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
ℝami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Ensimmäisissä laskuharjoituksissa pitää todistaa kuvaus metriikaksi. Tehtävän ratkaisun avuksi todistetaan nyt tason Manhattan-etäisyys metriikaksi.

Lause. Tasossa määriteltävä Manhattan-etäisyys

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2|$$

on metriikka.

Todistus. Käydään läpi metriikan ehdot. Etäisyys on määritelty yksikäsitteisesti kaikille tason pistepareille, sillä tason pisteen $\mathbf{v}$ koordinaatti-esitys (v_1, v_2) on yksikäsitteinen. (Ja aina olemassa.) Lisäksi etäisyys on aina epänegatiivinen, sillä se saadaan summana kahdesta itseisarvosta, jotka ovat aina epänegatiivisia.

Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Todistetaan metriikalta vaadittu kolmioepäyhtälö kirjoittamalla auki Manhattan-etäisyyden määritelmä ja soveltamalla reaalilukujen itseisarvon kolmioepäyhtälöä.

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2| \\
&= |v_1 - u_1 + u_1 - w_1| + |v_2 - u_2 + u_2 - w_2| \\
&\leq |v_1 - u_1| + |u_1 - w_1| + |v_2 - u_2| + |u_2 - w_2| \\
&= |v_1 - u_1| + |v_2 - u_2| + |u_1 - w_1| + |u_2 - w_2| \\
&= d(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Metriikan ehto (M2) seuraa myös metriikan määritelmän aukikirjoittamisesta ja reaalilukujen itseisarvon ominaisuudesta $|-x| = |x|$.

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2| \\
&= |-w_1 + v_1| + |-w_2 + v_2| \\
&= |-(w_1 - v_1)| + |-(w_2 - v_2)| \\
&= |w_1 - v_1| + |w_2 - v_2| \\
&= d(\mathbf{w}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

Metriikan ehto (M3) seuraa myös metriikan määritelmän aukikirjoittamisesta ja reaalilukujen itseisarvon ominaisuudesta $|x| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$. (Käytämme myös tietona, että kahden epänegatiivisen luvun summa on nolla jos ja vain jos kumpikin luvuista on nolla.)

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 &\Leftrightarrow |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2| = 0 \\
&\Leftrightarrow |v_1 - w_1| = 0 \quad \text{ja} \quad |v_2 - w_2| = 0 \\
&\Leftrightarrow v_1 = w_1 \quad \text{ja} \quad v_2 = w_2 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Täten metriikan ehdot on käyty läpi, joten Manhattan-etäisyys on metriikka. $\square$