Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Normiavaruudet ryhmätyönä

Tämän kerran opetus on muodoltaan ryhmätyöskentelyä. Käykää läpi tekstin asiat (normin määritelmä ja normista saatava metriikka) pienissä ryhmissä. Keskustelkaa esiintyvistä asioista sekä määritelmistä ja ratkaiskaa esiintyvät kaksi tehtävää. Jos jotain jää käymättä, niin lukekaa se kotona loppuun. Paperin viimeinen kohta, tehtävä 2, käydään läpi maanantaina luennolla. Mikäli haluaa ymmärtää metriikan ja varsinkin normin indusoiman metriikan hyvin, kannattaa todistusta yrittää itse.

Viimeinen sivu kuuluu repäistä irti ja palauttaa luennoitsijalle mikäli haluaa. Tavataan luokassa viittä vaille.

Juttua

Määrittelimme metriikan intuitiiviselle tasolla mittarina, joka mittaa miten erilaisia kaksi asiaa ovat. Tänään tarkastelemme *normia*, jonka voi nähdä mittaavan sitä, miten 'iso' jokin asia on. Mittatikkuna toimii taas $\mathbb{R}_+$. Normi on tullut useimmille vastaan varmaankin Lineaarialgebran kurssilla Euklidisen normin muodossa. Vaikka Euklidinen normi onkin eräs tärkeimmistä perusnormeista, on normeja hyvin paljon muitakin ja ne voivat poiketa paljonkin Euklidisesta normista. (Ihan niinkuin Euklidisen metriikan lisäksi on huomattavan paljon muitakin metriikoita eli erilaisuuskäsitteitä.)

Erilaisia isouskäsitteitä voitaisiin määritellä hyvin monenlaisissa avaruuksissa ja tilanteissa, mutta tällä kurssilla tarkastelemme normia, joka määritellään aina vektoriavaruudessa. (Muistutuksena, vektoriavaruus on avaruus, jossa vektoreiksi tai pisteiksi kutsuttuja alkioita voidaan laskea järkevästi yhteen ja kertoa reaaliluvuilla. Tarkka määritelmä löytyy topologian kirjasta, lineaarialgebran luentomateriaalista tai vaikka Wikipediasta.) Syitä siihen, että tarkastelemme nimenomaan vektoriavaruuksien normeja on useita. Ensinnäkin, saamme nyt sidottua yhteen Lineaarialgebra & matriisilaskennan kurssin ja Analyysi I:n käsitteitä. Toisekseen vektoriaavaruudet normeineen ovat tärkeä työkalu matematiikassa, joten sen topologisten ominaisuuksien tuntemisesta on paljon hyötyä.

Muutamia esimerkkejä:

- Euklidinen normi:
$$\|\mathbf{v}\|_2 := \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}.$$
Piste on sitä isompi mitä kauempana se on origosta.
- Manhattan-normi määritellään tason $\mathbb{R}^2$ pisteelle asettamalla
$$\|\mathbf{v}\|_1 := |v_1| + |v_2|.$$
Piste on sitä suurempi mitä kauempana se on origosta 'Manhattan-mielessä'.

- Olkoon $C[0,1]$ kaikkien jatkuvien kuvausten $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ joukko. Voimme määritellä joukkoon erilaisia isouden käsitteitä esimerkiksi integraalin avulla, kuvaus on sitä isompi mitä isomman pinta-alan se jättää alleen. (Mahdollisesti joillain potenssi-painotuksilla.)
  - $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\ \mathrm{d}x$
  - $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\ \mathrm{d}x}$
  - $\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x)|^p\ \mathrm{d}x}$
- Muistamalla, että jatkuva kuvaus saa suljetulla rajoitetulla välillä aina suurimman arvon, voidaan vektoriavaruuteen $C[0,1]$ voidaan määritellä normi myös seuraavalla tavalla:

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

Tehtävää

Tutustu seuraavaan normin määritelmään.

Määritelmä. Olkoon V vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_+$ on *normi* mikäli se toteuttaa seuraavat ehdot:

(N1) Kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ pätee

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

(N2) Kaikilla reaaliluvuilla a ja vektoreilla $\mathbf{v} \in V$ on voimassa $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

(N3) Vektorille $\mathbf{v} \in V$ pätee $\|\mathbf{v}\| = 0$ jos ja vain jos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Todistetaan havainnoillistamiseksi, että Manhattan-normi toteuttaa normin määritelmän ehdon (N2).

Olkoon $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $\mathbf{v}$ voidaan kirjoittaa koordinaattiesityksessä muodossa (v_1, v_2), missä v_1 ja v_2 ovat reaalilukuja. Tason vektorien yhteenlasku ja skalaarilla (reaaliluvulla) kertominen on määritelty seuraavasti:

- Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

- Olkoon $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$a\mathbf{v} = a(v_1, v_2) = (av_1, av_2).$$

Haluamme nyt siis todistaa, että mikäli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, niin $\|a\mathbf{v}\|_1 = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|_1$. Lähdetään avaamaan yhtälön vasemman puolen termiä määritelmien avulla.

$$\begin{aligned}
\|a\mathbf{v}\|_1 &= \|a(v_1, v_2)\|_1 \\
&= \|(av_1, av_2)\|_1 \\
&\overset{(1)}{=} |av_1| + |av_2| \\
&\overset{(2)}{=} |a| \cdot |v_1| + |a| \cdot |v_2| \\
&\overset{(3)}{=} |a|(|v_1| + \cdot|v_2|) \\
&= |a| \cdot \|\mathbf{v}\|_1.
\end{aligned}$$

Selitteet:

(1) Vektorin Manhattan-normi on sen koordinaattien itseisarvojen summa. Vektorin $a\mathbf{v}$ koordinaatit ovat av_1 ja av_2.

(2) Reaalilukujen tulon itseisarvo on lukujen itseisarvojen tulo. (Analyysi I)

(3) Haluamme saada esiin vektorin $\mathbf{v}$ Manhattan-normin, eli summan $|v_1|+\cdot|v_2|$. Tämä onnistuu ottamalla luku $|a|$ tekijäksi.

Väite on täten todistettu.

Tehtävä 1: Todista, että tason 'Manhattan-normi' $\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1|+|v_2|$ on normi. Reaalilukujen itseisarvon kolmioepäyhtälöä ja muita sen perusominaisuuksia saa käyttää.

Lisää juttua ja tehtävää

Haluaisimme nyt muodostaa normista metriikan eli kahden vektorin erilaisuuden mittarin. Huomaamme aluksi, että vektoriavaruudessa voidaan määritellä kahden vektorin $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ erotus $\mathbf{v}-\mathbf{w}$. Kahden vektorin erotus olisi muuten hyvä erilaisuuden mittari, mutta kuvauksesta $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} - \mathbf{w}$ ei saada metriikkaa, sillä erotus ei ole epänegatiivinen reaaliluku. Onneksi voimme korjata tilanteen normin avulla, jolla voimme mitata tämän erilaisuuden koon. Asetetaankin siis

$$d_{\|\cdot\|}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

Tätä kutsutaan *normin* $\|\cdot\|$ *indusoimaksi metriikaksi.*

Tehtävä 2: Todista, että normin indusoima metriikka on metriikka.