Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Esimerkkejä jonoista.

Seuraavassa muutama esimerkki suppenevista ja ei-suppenevista lukujonoista. Esimerkit ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ lukujonoja erilaisilla metriikoilla, mutta perusideat kantautuvat mielivaltaisiin metrisiin avaruuksiin.

Pari suppenevaa jonoa.

Jonon suppenemisen todistamisessa toimii usein seuraava “skeema”.

(I) ’Arvataan’ jonolle jokin raja-arvo a.

(II) Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$.

(III) Muodostetaan epäyhtälöketju

$$d(x_n, a) \overset{\text{Määr.}}{=} \cdots \leq \cdots \leq \text{JJOTPKI}n,$$

missä JJOTPKIn = “ Jotain, jonka osaat tehdä pieneksi kasvattamalla indeksiä n”

(IV) Näytä, miten JJOPTKIn tehdään pienemmäksi kuin ε kasvattamalla indeksiä, esimerkiksi:

$$\frac{33}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n < \frac{33}{\varepsilon}.$$

(V) Kokoa tulokset yhteen, eli näytä että äskeisen kohdan avulla löytyy kynnysindeksi n_0 siten, että kaikilla $n \geq n_0$ pätee

$$d(x_n, a) \leq \text{JJOTPKI}n < \varepsilon$$

ja totea, että jono suppenee.

Esimerkkejä:

1. Olkoon $x_n = (\frac{5}{n} + 4, 4)$. Näytetään, että jono suppenee kohti pistettä $(4, 4)$ Euklidisessa metriikassa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Huomataan, että

$$d(x_n, (4, 4)) = \sqrt{(\frac{5}{n} + 4 - 4)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{\frac{5^2}{n^2}} = \frac{5}{n}.$$

Huomataan lisäksi, että pätee

$$\frac{5}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon}.$$

Täten, jos valitaan $n_0 > \frac{5}{n}$, niin kaikilla $n \geq n_0$ pätee

$$d(x_n, (4, 4)) = \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n_0} < \varepsilon.$$

Täten $x_n \to (4, 4)$.

2. Olkoon $x_n = (\frac{\sin(n)}{n^2} - 1, \frac{4}{n^2})$. Näytetään, että jono suppenee kohti pistettä $(-1,0)$ Manhattan-normin indusoimassa metriikassa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} d(x_n,(-1,0)) &= \left|\frac{\sin(n)}{n^2} - 1 - (-1)\right| + \left|\frac{4}{n^2} - 0\right| \\ &= \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|| + \left|\frac{4}{n^2}\right|| \\ &= \frac{1}{n^2}|\sin(n) + 4| \\ &\leq \frac{1}{n^2}5. \end{aligned}$$

Huomataan lisäksi, että pätee

$$\frac{5}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Täten, jos valitaan $n_0 > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\varepsilon}}$, niin kaikilla $n \geq n_0$ pätee

$$d(x_n,(-1,0)) \leq \frac{5}{n^2} \leq \frac{5}{n_0^2} < \varepsilon.$$

Täten $x_n \to (-1,0)$.

Pari ei-suppenevaa jonoa.

Kun haluaa näyttää, että jono ei suppene käyttäen määritelmiä, niin tekniikkana voi käyttää seuraavaa.

Jono x_n ei suppene kohti pistettä a, mikäli on olemassa sellainen luku $C > 0$, että jokaista n_0 kohti on olemassa sellainen indeksi n, että $d(x_n,a) \geq C$. (Eli siten että $x_n \notin B(a,C)$.) Mikäli tällaista lukua C ei löytyisi, niin määritelmän nojalla pätisi (**Tarkista tämä itse!**) $x_n \to a$. Valitaan siis mielivaltainen piste $a \in X$ ja yritetään löytää mainitunlainen vakio C.

Esimerkkejä:

1. Olkoon $x_k = ((-1)^k, (-1)^k)$. Näytetään, että jono ei suppene yhtään avaruuden $\mathbb{R}^2$ pistettä kohti Manhattan-normin indusoimassa metriikassa.

   Olkoon $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Huomataan, että pätee

   $$d(a, x_k) = |a_1 - (-1)^k| + |a_2 - (-1)^k| \geq |a_1 - (-1)^k|.$$

   Eli jos löydämme lukun $C > 0$ siten että pätee $|a_1 - (-1)^k| \geq C$ äärettömän monella indeksillä k, niin väite on todistettu. Huomataan, että luvuista $(-1)^k$ muodostuu jono $-1, 1, -1, 1, \ldots$. Luku a_1 ei voi olla alle ykkösen päästä sekä luvusta -1 että 1, koska muuten pätisi

   $$2 = d(-1,1) \leq d(-1,a) + d(a,1) < 1 + 1 = 2,$$

   mikä on mahdotonta.

   Eli välttämättä $d(1,a) \geq 1$ tai $d(-1,a) \geq 1$.

- Mikäli on voimassa $d(1, a) \geq 1$, niin kaikilla parittomilla indekseillä k (eli erityisesti äärettömän monella indeksillä k) pätee $|a_1 - (-1)^k| \geq 1$.
- Jos puolestaan pätee, että $d(-1, a) \geq 1$, niin kaikilla parillisilla indekseillä k (eli taas erityisesti äärettömän monella indeksillä k) pätee $|a_1 - (-1)^k| \geq 1$.

Täten voimme aina valita aiemmin mainituksi vakioksi C luvun 1.

2. Olkoon $x_k = (\frac{1}{k}, 0)$. Näytetään, että jono ei suppene kohti yhtään tason pistettä diskreetissä metriikassa.

   Olkoon $a \in \mathbb{R}^2$. Piste a on muotoa (a_1, a_2), ja koska jonon x_k ensimmäiset koordinaatit ovat kaikki eri lukuja, voi päteä $a = x_k$ enintään yhdellä k. Täten kaikilla tarpeeksi suurilla indekseillä pätee, että $a \neq x_k$, jolloin $d(a, x_k) = 1$. Täten voimme valita mainituksi indeksiksi C luvun 1. Täten $x_k \not\to a$.