Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Esimerkkejä jatkuvuudesta ja epäjatkuvuudesta

Päivitetty 23. syyskuuta 2012.

Esimerkki 1. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvaus $f(x,y) = (x-4y,1)$. Näytetään, että f on jatkuva jokaisessa tason pisteessä, kun lähtöpuolella on käytössä Manhattan-normin indusoima metriikka d ja maalipuolella Euklidinen metriikka d'.

Olkoon $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Näytetään, että f on jatkuva pisteessä (x_0,y_0).
Pohdintaa: Olkoon $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Huomataan, että pätee

$$\begin{aligned}
d'(f(x_0,y_0),f(x,y)) &= d'((x_0-4y_0,1),(x-4y,1)) \\
&= \sqrt{(x_0-4y_0-x+4y)^2+(1-1)^2} \\
&= |x_0-4y_0-x+4y| \\
&\leq |x_0-x| + 4|y_0-y| \\
&\leq 4(|x_0-x|+|y_0-y|) \\
&= 4d((x_0,y_0),(x,y)).
\end{aligned}$$

Lisäksi kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee, että

$$4d((x_0,y_0),(x,y)) < \varepsilon \Leftrightarrow d((x_0,y_0),(x,y)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nämä huomiot yhdistämällä voimme koota seuraavan todistuksen.
Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$. Nyt

$$d'(f(x_0,y_0),f(x,y)) \leq 4d((x_0,y_0),(x,y)) < 4\delta < 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Kuvaus on täten jatkuva pisteessä (x_0,y_0).

Esimerkki 2. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } x = y, \\ 0 & \text{, kun } x \neq y. \end{cases}$$

Tämä kuvaus ei ole jatkuva origossa, kun lähtöpuolella on Manhattan-normin indusoima metriikka d ja maalipuolella tavallinen reaalilukujen etäisyys d'.
Pohdintaa: Näyttääksemme, että kuvaus ei ole jatkuva, pitää meidän löytää luku $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $\delta > 0$ on olemassa piste $(x,y) \in B((0,0),\delta)$, jolle pätee $d'(f(x,y),f(0,0)) \geq \varepsilon$. Huomataan, että pisteillä $(t,-t)$, $t \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$d'(f(-t,t),f(0,0)) = d'(1,0) = 1.$$

Todistus: Olkoon $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Nyt kaikilla $\delta > 0$ voidaan valita piste $(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}) \in B((0,0),\delta)$, jolle pätee

$$d'(f(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}), f(0,0)) = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Kuvaus f ei ole siis jatkuva pisteessä $(0,0)$.

Esimerkki 3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus, joka määritellään asettamalla $f(x) = 2x$. Kuvaus f ei ole jatkuva missään pisteessä, mikäli lähtöpuolella on Euklidinen metriikka d ja maalipuolella diskreetti metriikka d'. (Jännää sinänsä.)
Pohdintaa: Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Kaikilla pisteillä $x \neq x_0$ pätee, että $f(x) \neq f(x_0)$, eli kaikilla tällaisilla x pätee, että $d'(f(x), f(x_0)) = 1$. Kuitenkin koska lähtöpuolella on Euklidinen metriikka, niin millä tahansa δ on olemassa pisteitä $x \in B(x_0, \delta)$ siten että $x \neq x_0$.
Todistus: Olkoon $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Nyt kaikilla δ voidaan valita piste $x = x_0 - \frac{\delta}{2}$, jolle pätee, että $d(x, x_0) < \delta$, mutta $d'(f(x), f(x_0)) = 1 \geq \frac{1}{3} = \varepsilon$. Täten kuvaus f ei ole jatkuva pisteessä x_0.

Esimerkki 4. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mikä tahansa kuvaus. Kuvaus f on jatkuva kaikissa pisteissä, mikäli lähtöpuolella on diskreetti metriikka d ja maalipuolella diskreetti metriikka d'. (Jännää sinänsä.)
Pohdintaa: Kaikilla $\delta \leq 1$ pätee, että $d(x, y) < \varepsilon$ jos ja vain jos $x = y$.
Todistus: Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{1}{42}$. Nyt kaikilla $x \in B(x_0, \delta)$ pätee, että $x = x_0$, jolloin $d'(f(x), f(x_0)) = d'(f(x_0), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$. Täten kuvaus f on jatkuva kaikissa pisteissä $x_0 \in \mathbb{R}$.

Huomautus 5. Huomaa, että äskeisessä esimerkissä ei maalipuolen metriikalla ollut mitään merkitystä. Jos avaruudessa X on diskreetti metriikka d, niin kaikki kuvaukset $f\colon X \to Y$ ovat jatkuvia, oli maalipuolella mikä tahansa metriikka.

Esimerkki 6. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus, joka määritellään asettamalla $f(x) = 2x$. Kuvaus f on jatkuva kaikissa pisteessä, mikäli lähtöpuolella on diskreetti metriikka d ja maalipuolella Euklidinen metriikka d'. (Jännää sinänsä.)
Pohdintaa: Huomataan, että diskreetti metriikka saa vaan arvoja 0 tai 1, ja arvon 0 vain kun mitataan pisteen etäisyyttä itsestään. Täten valitsemalla jatkuvuuden määritelmässä $\delta = \frac{1}{2}$ huomaamme että kaikilla $x \in X$ joilla pätee $d(x, x_0) < \delta$ on voimassa $x = x_0$.
Todistus: Olkoon $x_0 \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{1}{2}$. Nyt kaikilla $x \in B(x_0, \delta)$ pätee, että $x = x_0$, joten $d'(f(x), f(x_0)) = d'(f(x_0), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$. Täten kuvaus f on jatkuva pisteessä x_0.

Huomautus 7. Huomaa, että kaikki vakiokuvaukset ovat jatkuvia, kun maalipuolella on diskreetti metriikka.