Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Lauseen 11.8. todistus kurssilla käydyllä terminologialla.

Määritelmä. Kuvaus $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ on *jatkuva pisteessä* $a \in X$, mikäli kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x \in X$ joilla pätee $d(x,a) < \delta$ on voimassa $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Yhtäpitävästi: ...kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x \in B(a,\delta)$ on voimassa $f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$.

Yhtäpitävästi: ...kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$fB(a,\delta) \subset B(f(a),\varepsilon).$$

Yhtäpitävästi: ...kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$B(a,\delta) \subset f^{-1}B(f(a),\varepsilon).$$

Lause. Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

(1) Kuvaus f on jatkuva pisteessä $a \in X$.

(2) Kaikilla avaruuden X jonoilla (x_n), joilla pätee $x_n \to a$ on voimassa $f(x_n) \to f(a)$.

Todistus. "(1) $\Rightarrow$ (2)": Olkoon (x_n) jono, joka suppenee kohti pistettä a sekä $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden määritelmän perusteella on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x \in B(a,\delta)$ pätee $f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$. Koska jono (x_n) suppenee kohti pistettä a, on olemassa kynnysindeksi n_0 siten, että $x_n \in B(a,\delta)$ kaikilla $n \geq n_0$.

Nyt kaikilla $n \geq n_0$ pätee $x_n \in B(a,\delta)$, jolloin jatkuvuuden perusteella $f(x_n) \in B(f(a),\varepsilon)$. Täten jonon suppenemisen määretelmän perusteella $f(x_n) \to f(a)$.

"(2) $\Rightarrow$ (1)": Näytetään, että jos ehto (1) ei ole voimassa, on ehto (2) myös epätosi. Oletetaan siis, että kuvaus f ei ole jatkuva pisteessä a. Tällöin on olemassa luku $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $\delta > 0$ löytyy piste $x \in B(a,\delta)$ jolle pätee $d'(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Jokaisella n valitaan $\delta = \frac{1}{n}$ ja äskeisen huomion antama piste $x_n \in B(a,\delta)$, jolle pätee $d'(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Koska $d(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$, niin $x_n \to a$, mutta pisteiden x_n valinnan nojalla $f(x_n) \not\to f(a)$. Täten ehto (2) ei ole voimassa ja väite on todistettu.

$\square$