Opettajalinjan työpaja (Topologia I)
Syksy 2012
$\mathbb{R}$ami Luisto
rami.luisto@helsinki.fi

Esimerkki avoimesta joukosta.

Päivitetty 3. lokakuuta 2012.

Esimerkki 1. Suorakulmio $A :=]0,1[\times]-1,7[\subset \mathbb{R}^2$ on avoin joukko, kun käytössä on Manhattan-normin indusoima metriikka.

Todistus. **Pohdintaa:** Haluamme löytää mielivaltaiselle pisteelle $a \in A$ kuulaympäristön joka sisältyy joukkoon A. Tätä varten huomaamme, että mille tahansa pisteelle $a \in A$ pätee, että sen koordinaattien a_1 ja a_2 etäisyydet luvuista 0 ja 1, sekä -1 ja 7 ovat kaikki aidosti positiivisia. Täten jos valitsemme näistä luvuista pienimmän, ja tarkastelemme pisteitä jonka koordinaattien etäisyys on pisteen a kordinaateista alle tämän pienimmän luvun, pitäisi homman toimia.

Todistus:

Olkoon $a \in A$. Valitaan

$$r_1 := \min\{|a_1 - 0|, |a_1 - 1|\} \quad \text{ja} \quad r_2 := \min\{|a_2 - (-1)|, |a_2 - 7|\}.$$

Kummatkin luvut ovat positiivisia, sillä $a \in A$. Asetetaan $r_a := \frac{1}{2}\min\{r_1, r_2\}$ ja todistetaan että pätee $B(a, r_a) \subset A$. Tätä varten otetaan mielivaltainen $x = (x_1, x_2) \in B(a, r_a)$ näytetään, että pätee $x \in A$. Huomataan, koska käytössä on Manhattan-normin indusoima metriikka, niin pätee

$$|x_1 - a_1| \leq |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = d_1(a, x) < r_a.$$

Toisaalta koska $r_a < a_1 - 0$ ja $r_a < 1 - a_1$, niin pätee

$$\begin{aligned}
|x_1 - a_1| < r_a &\Leftrightarrow -r_a < x_1 - a_1 < r_a \\
&\Rightarrow 0 - a_1 < x_1 - a_1 < 1 - a_1 \\
&\Leftrightarrow 0 < x_1 < 1,
\end{aligned}$$

eli $x_1 \in]0,1[$. Vastaavalla päättelyllä nähdään, että $x_2 \in]-1,7[$.

Täten $x \in]0,1[\times]-1,7[$, joten $B(a, r_a) \subset]0,1[\times]-1,7[$ ja joukko A on siis avoin. $\square$

Esimerkki 2. Suorakulmio $A :=]0,1[\times]-1,7[\subset \mathbb{R}^2$ on avoin joukko, kun käytössä on Euklidinen metrikka d.

Todistus. Todistus on käytännössä sama kun yllä, sillä taas pätee

$$|a_1 - x_1| = \sqrt{(a_1 - x_1)^2} \leq \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2} = d(a, x).$$

$\square$

Esimerkki 3. Suorakulmio $B := [0,1] \times [0,1[\subset \mathbb{R}^2$ ei ole avoin joukko, kun käytössä on Manhattan-normin indusoima metrikka d_1.

Todistus. **Pohdintaa:** Ollakseen avoin, pitäisi jokaisella joukon B pisteellä olla kuulaympäristö joka sisältyy joukkoon B. Huomaamme kuitenkin (esimerkiksi kuvaa tarkastelemalla) että mielivaltaisen lähellä "nurkkapistettä" $(0,0) \in B$ näyttäisi olevan pisteitä, jotka eivät kuulu joukkoon B. Esimerkiksi muotoa $(-t,-t)$ olevat pisteet.

Todistus: Näytetään, että pisteen $(0,0) \in B$ jokainen kuulaympäristö sisältää pisteen, joka ei kuulu joukkoon B. Tästä seuraa, ettei joukko ole avoin. Olkoon $r > 0$. Nyt pisteelle $x_r := (-\frac{r}{3}, \frac{r}{3})$ pätee, että

$$d_1(x_r,(0,0)) = |-\frac{r}{3} - 0| + |-\frac{r}{3} - 0| = \frac{2r}{3} < r.$$

Täten $x_r \in B((0,0),r)$, mutta $x_r \notin B$. Täten väite on todistettu.

□

Esimerkki 4. Olkoon (X,d) epätyhjä metrinen avaruus ja $x_0 \in X$. Tällöin joukko $A := X \setminus \{x_0\}$ on avoin.

Todistus. **Todistus:** Mikäli pätee $X = \{x_0\}$, niin $A = \emptyset$ ja tällöin A on tyhjänä joukkona avoin. Oletetaan siis, että avaruudessa X on vähintään kaksi pistettä.

Olkoon $a \in A$. Merkitään $r_a = d(a,x_0)$ ja todistetaan, että $B(a,r_a) \subset A$. Tämä seuraa siitä, että mikäli ei pätisi $B(a,r_a) \subset A$, niin välttämättä olisi voimassa $x_0 \in B(a,r_a)$, jolloin $d(x_0,a) < r_a = d(x_0,a)$, mikä on mahdotonta.

Olemme siis löytäneet mielivaltaiselle joukon A pisteelle kuulaympäristön, joka sisältyy joukkoon A. Täten joukko A on avoin.

□

Esimerkki 5. Olkoon (X,d) epätyhjä metrinen avaruus, $U \subset X$ avoin joukko ja $x_0 \in X$. Tällöin joukko $A := U \setminus \{x_0\}$ on avoin.

Todistus. Mikäli pätee $U = \{x_0\}$[1], niin $A = \emptyset$ ja tällöin A on tyhjänä joukkona avoin. Oletetaan siis, että joukossa U on vähintään kaksi pistettä.

Olkoon $a \in A$. Koska $a \in U$ ja joukko U on avoin, niin on olemassa $r_1 > 0$ siten, että $B(a,r_1) \subset U$. Merkitään lisäksi $r_2 = d(a,x_0)$ ja asetetaan $r_a = \min\{r_1,r_2\}$.

Todistetaan nyt, että $B(a,r_a) \subset A$. Tämä seuraa siitä, että $r_a \le r_1$, joten $B(a,r_a) \subset B(a,r_1) \subset U$, joten mikäli ei pätisi $B(a,r_a) \subset A$, niin välttämättä olisi voimassa $x_0 \in B(a,r_a)$, jolloin $d(x_0,a) < r_a = d(x_0,a)$, mikä on mahdotonta.

Olemme siis löytäneet mielivaltaiselle joukon A pisteelle kuulaympäristön, joka sisältyy joukkoon A. Täten joukko A on avoin.

□

Esimerkki 6. Olkoon (X,d) epätyhjä metrinen avaruus ja $x_0,\dots,x_n \in X$. Tällöin joukko $A := X \setminus \{x_0,\dots,x_n\}$ on avoin.

Todistus. Mikäli pätee $X = \{x_0,\dots,x_n\}$, niin $A = \emptyset$ ja tällöin A on tyhjänä joukkona avoin. Oletetaan siis, että avaruudessa X on muitakin pisteitä kuin $x_0,\dots,x_n$. Todistetaan väite kolmella eri tyylillä:

[1] Näin voi käydä, mikäli piste x_0 on erakkopiste.

Tapa 1: Olkoon $a \in A$. Merkitään

$$r_a = \min\{d(a, x_i) \mid i = 0, \dots, n\}$$

ja todistetaan, että $B(a, r_a) \subset A$. Tämä seuraa siitä, että mikäli ei pätisi $B(a, r_a) \subset A$, niin välttämättä olisi voimassa $x_i \in B(a, r_a)$ jollain $i = 1, \dots, n$. Mutta tällöin pätisi $d(x_i, a) < r_a \leq d(x_i, a)$, mikä on mahdotonta.

Olemme siis löytäneet mielivaltaiselle joukon A pisteelle kuulaympäristön, joka sisältyy joukkoon A. Täten joukko A on avoin.

Tapa 2: Edellisen kohdan perusteella jokainen joukko $X \setminus \{x_i\}$ on avoin. Todistamamme lauseen mukaan äärellinen leikkaus avoimista joukoista on avoin, joten joukko

$$A = \bigcap_{i=0}^{n} X \setminus \{x_i\}$$

on avoin.

Tapa 3: Todistetaan induktiolla luvun n suhteen, että mikäli metrisestä avaruudesta poistetaan n pistettä, niin jäljelle jäävä joukko on avoin.

Alkuaskel: Mikäli avaruudesta X poistetaan yksi piste, niin esimerkin 4 perusteella jäljelle jäävä joukko on avoin.

Induktioaskel: Olkoot $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in X$. Induktio-oletuksen perusteella joukko $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ on avoin, ja esimerkin 5 perusteella pätee, että mikäli poistamme avoimesta joukosta $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ pisteen x_{n+1}, niin jäljelle jäävä joukko on edelleen avoin.

□

Esimerkki 7. Olkoon (X, d) epätyhjä metrinen avaruus, $U \subset X$ avoin ja $x_0, \dots, x_n \in X$. Tällöin joukko $A := U \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ on avoin.

Todistus. Käytännössä sama todistus kuin edellisessä kohdassa. □

Katsotaan seuraavaksi, mitä käy jos metrisestä avaruudesta poistetaan ääretön joukko pisteitä.

Esimerkki 8. Olkoon reaaliakselilla tavallinen erotuksen itseisarvon indusoima metriikka. Tällöin

(a) Joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ on avoin.

(b) Joukko $A := \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}$ ei ole avoin.

Todistus. (a) Olkoon $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Tällöin on olemassa luku $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $x \in]n, n+1[$. Merkitään $r = \min\{d(x, n), d(x, n+1)\}$, jolloin pätee $B(x, r) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, sillä kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ on voimassa $d(k, x) \geq r$.

(b) Näytetään, että pisteellä $0 \in A$ ei ole ympäristöä, joka sisältyisi joukkoon A. Tämä seuraa suoraan siitä, että kaikilla $r > 0$ voidaan valita $n \geq \frac{1}{r}$ jolloin pätee, että $d(\frac{1}{n}, 0) < r$, eli kaikilla r löytyy piste $\frac{1}{n} \notin A$ jolle pätee $\frac{1}{n} \in B(0, r)$,

Tämä todistaa väitteen.

□