

Matematiikka tutuksi, syksy 2012

Lisätehtäviä

Jos et ole kurssin aikana saanut kerättyä läpipääsyyn vaadittua 24 pistettä, mutta kuitenkin vähintään 18 pistettä, tekemällä seuraavat kuusi tehtävää saat kurssista hyväksytyt suorituksen. Tehtävistä pitää tehdä kaikki 6. Tehtävät palautetaan kirjallisesti luennoitsijalle joko sähköpostitse tai laitoksen posti-huoneessa olevaan lokeroon.

1. Diofantos on 200-luvulla elänyt kreikkalainen matemaatikko. Hänen ihailijansa kaiversivat seuraavan arvoituksen hänen hautaansa:

Diofantoksen nuoruus kesti $1/6$ hänen iästään. Hän kasvatti parran elettyään vielä $1/12$ elämästään. Elettyään vielä $1/7$ hän meni naimisiin. Viisi vuotta myöhemmin hän sai pojan. Hänen poikansa eli tasan $1/2$ isänsä iästä. Diofantos kuoli neljä vuotta poikansa kuoleman jälkeen. Tästä kaikesta tulee Diofantoksen elinvuosien määrä.

Kuinka vanhaksi Diofantos eli?

2. Joukkojen A ja B symmetrinen erotus $A\Delta B$ määritellään seuraavasti:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Mikä joukko $A\Delta B$ on, jos

- (a) $A = \{1, 2, 13, 17, 42\}$ ja $B = \{1, 2, 13, 17\}$
- (b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ on parillinen}\}$ ja $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ on pariton}\}$
- (c) $A = B$

3. Osoita, että

- (a) $k^2 + k$ on parillinen jokaisella kokonaisluvulla k
- (b) $n^2 - m^2$ on jaollinen luvulla 8 aina kun m ja n ovat parittomia kokonaislukuja.

4. Todista induktiolla, että kaava

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

on voimassa jokaisella $n = 1, 2, 3, \dots$

5. *Mooren lain* mukaan tietokoneprosessorien transistorimäärä kaksinkertaistuu aina kahden vuoden välein. Vuonna 1985 Intelin julkistamassa 386 -prosessorissa oli 275000 transistoria. Arvioi tämän tiedon pohjalta, minä vuonna prosessorien transistorimäärä ylittää kymmenen miljardia.

6. Kutsuilla on 4 vierasta, joista kukin on jättänyt hattunsa entuudestaan tyhjälle hattuhyllylle. Lähtiessä jokainen vieraista valitsee hyllyltä umpimähkään yhden hatun. Millä todennäköisyydellä

- (a) kukin vieraista saa oman hattunsa?
- (b) kukaan vieraista ei saa omaa hattuaan
- (c) ainakin yksi vieraista saa oman hattunsa?