1. Eulerin kaava ja kompleksiluvut

Kun $a, b \in \mathbb{R}$, määrittelemme kompleksiluvun $z = a + ib \in \mathbb{C}$, missä i on symboli jolle

$$i^2 = 1$$

(löysästi sanoen, $i = \sqrt{-1}$).
Normaalit laskusäännöt pätevät:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (c+di)\cdot(a+bi)$$
$$= ac + bci + adi + bdi^2$$
$$= ac - bd + i(bc+ad),$$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Seuraavaksi määrittelemme funktiot e^z, $\sin z$, $\cos z$

Kysymys: Miksi kompleksiluvut ovat hyödyllisiä, vrt kvaterniot $a + ib + jc + dk$, jolle $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k$, $j \cdot k = i$, $k \cdot i = j$...

Kerrataan Taylorin kaava funktiolle

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n + \mathcal{O}(|x-a|^{N+1})$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad |\mathcal{O}(h(x))| \leq C|h(x)|$$

Tämä antaa

$$(1) \quad \begin{cases} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \end{cases}$$

Kysymys
- miten nopeasti $n!$ kasvaa kun $n \to \infty$, $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{1/2} \left(\frac{n}{e}\right)^n$
- Suppeneeko $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ aina funktioon $f(x)$. Esim.

  $f(x) = e^{-1/|x|}$, $x > 0$; $f(x) = 0$, $x \leq 0$

<u>Määritelmä 1</u> Määritellään e^z, $\cos z$, $\sin z$, ... kaavoilla (1) sijoittamalla muuttujan x arvoksi $x = a + ib \in \mathbb{C}$.

Lause (Eulerin kaava). Kun $z \in \mathbb{C}$, pätee

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

<u>Todistus</u> Kun z:n paikalle sijoitetaan iz, nähdään

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n$$

$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{i}{5!} z^5 + \dots$$

$$= \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right] + i\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right]$$

$$= \cos z + i \sin z$$

<u>Lemma</u> $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

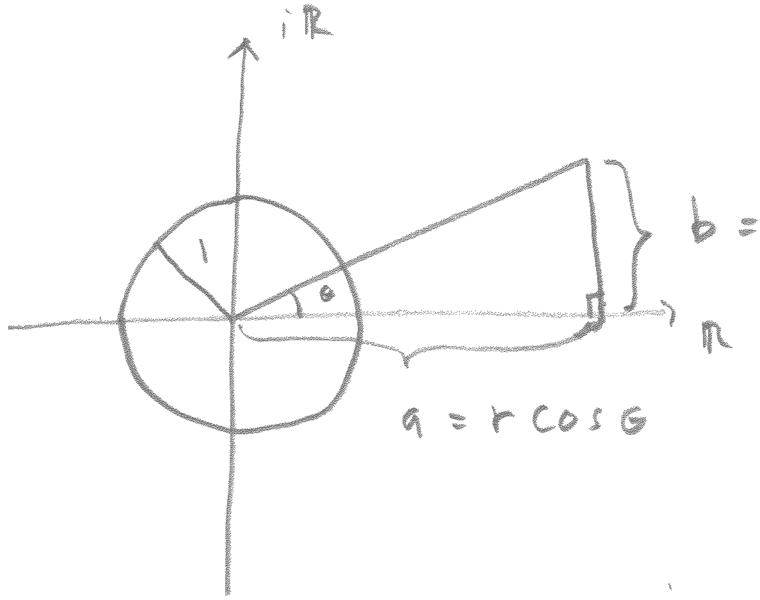
<u>tod</u>. Sivuutetaan.

Eulerin kaavan erikoistapaus on

$$e^{r+i\theta} = e^r\cdot e^{i\theta} = e^r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

kertaamme, että $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
Tämä antaa geometrisen tulkinnan luvulle

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



HT: todista, että
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

2. Tavalliset differentiaaliyhtälöt

Lause (Picard) Olkoon $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funktio, jolle

(1) $$|F(x) - F(y)| \leq C_0 |x - y| \quad , \text{ kun } x, y \in \mathbb{R}^n$$

Silloin differentiaaliyhtälöllä

(2) $$\frac{d\vec{x}}{dt}(x) = F(\vec{x}(t)) \quad , \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

on jollakin $T > 0$ yksikäsitteinen ratkaisu

$$\vec{x} : [0, T] \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \vec{x} \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^n).$$

Tod. Sivuutetaan. Yllä voidaan valita $T = \infty$.

ESIM:

1) Olkoon $a, b, c \in \mathbb{R}$. Diff. yhtälö $\left(\text{missä } y' = \frac{dy}{dt}\right)$

(3) $$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0 \quad , \quad y(0) = f_0, \; y'(0) = f_1, \; a \neq 0$$

voidaan kirjoittaa vektorille

(4) $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

muotoon

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\frac{b}{a}y'(t) - \frac{c}{a}y(t) \end{pmatrix}$$

eli

$$\vec{x}'(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{b}{a}x_2(t) - \frac{c}{a}x_1(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= F(\vec{x}(t)),$$

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

yhtälölle (3) on siis aina demassi ratkaisu

2) Yhtälöllä $\begin{cases} y'(t) = c \cdot y(t) \\ y(0) = A \in \mathbb{C} \end{cases}$, $y(t) \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$

on ratkaisu $y(t) = Ae^{ct}$.

yhtälö $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ on lineaarinen, joten jos $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ ovat sen ratkaisuja niin myös

$$y(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

on yhtälön ratkaisu.

Seuraus: Jos $y_1(t)$ on ratkaisu jolle

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ \frac{dy_1}{dt}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ja

$y_2(t)$ on ratkaisu jolle

$$\begin{pmatrix} y_2(0) \\ \frac{dy_2}{dt}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

niin funktio

$$y(t) = f_1 y_1(t) + f_2 y_2(t)$$

on yhtälön (3) ratkaisu.
Siis yhtälön (3) ratkaisemiseksi riittää löytää kaksi ratkaisua.

Tehdään yrite: olkoon

$$y(t) = e^{rt}, \quad r \in \mathbb{C}.$$

Tämä toteuttaa yhtälön

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0$$

jos,[1]

$$\left(a \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c\right) e^{rt}$$

$$= a r^2 e^{rt} + b r e^{rt} + c e^{rt}$$

$$= (a r^2 + b r + c) e^{rt} = 0$$

Näin on jos $ar^2 + br + c = 0$
eli

(5) $$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = r_\pm$$

① Huomautamme, että $\frac{d}{dt} e^{rt} = r e^{rt}$

Jos $b^2-4ac \neq 0$, tämä antaa etsityt kahsi ratkaisua, e^{r_+t} ja e^{r_-t}. (tapaus $b^2-4ac=0$ käsitellään laskuharjoituksissa)

Kun $b^2-4ac < 0$,

$$r_+ = \alpha + i\beta \qquad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
$$r_- = \alpha - i\beta$$

jolloin

$$e^{r_+t} = e^{\alpha t + i\beta t}$$
$$= e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$
$$= e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right),$$

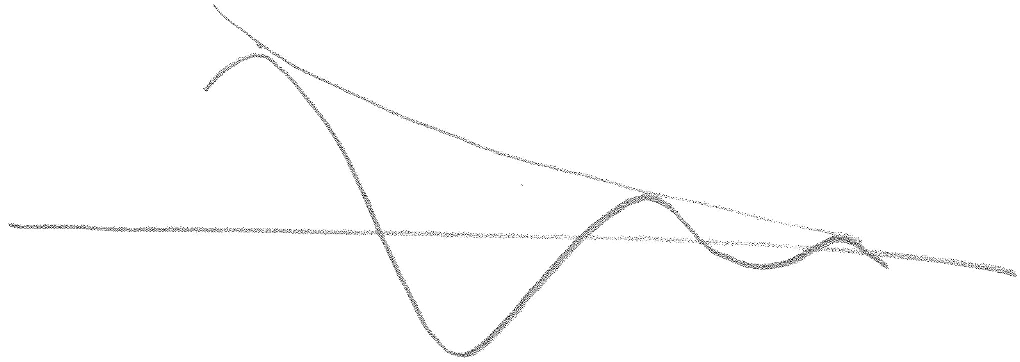
$$e^{r_-t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)\right)$$

ja

$$e^{r_+t} + e^{r_-t} = 2e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

on esimerkki reaaliarvoisesta ratkaisusta

Esim: "heiluri kitkaisella pinnalla" tai "RC-piiri elektroniikassa"



$$e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad \alpha < 0$$

Esim: N:n kappaleen systeemi avaruudessa $\vec{x}'(t) = F(\vec{x}(t))$, $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$
– epästabiilisuus löydetty äskettäin

Esim: $x(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$ toteuttaa

$$x'(t) = \begin{cases} 2t, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

$$x'(t) = 2\,|x(t)|^{1/2} = F_0(x(t))$$

Esim: Einsteinin yhtälöt

Esim: Riccatin yhtälö $x'(t) = x(t)^2$, jolle on ratkaisu $x(t) = \dfrac{1}{c-t}$, $c > 0$

Sovellus

Olhoon $u(t) \in \mathbb{R}$ differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) = r^2 u(t) \quad , \quad t \geq 0 \, , \quad r \in \mathbb{C}$$

$$\frac{du}{dt}(0) = v \quad , \quad u(0) = w$$

ratkaisu. $u(t)$ on muotoa

$$u(t) = A e^{rt} + B e^{-rt} \quad , \quad A, B \in \mathbb{C}$$

missä
$$\begin{cases} Ar - Br = v \\ A + B = w . \end{cases}$$

Kun $r = ic$,

$$\begin{aligned} u(t) &= A e^{ict} + B e^{-ict} \\ &= A\left(\cos(ct) + i \sin(ct)\right) + \\ &\quad B\left(\cos(ct) - i \sin(ct)\right) \\ &= (A + B) \cos(ct) + (Ai - Bi) \sin(ct) \end{aligned}$$

Kun $r = c$,

$$u(t) = Ae^{ct} + Be^{-ct}, \quad A, B \in \mathbb{C}$$

exp. kasvava ratkaisu

exp. vähenevä ratkaisu

Moniulotteinen yhtälö

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriisi ja tarkastellaan $\mathbb{R}^n$-arvoiselle funktiolle $\vec{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ yhtälöä

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{X}(t) = A\vec{X}(t), & t \geq 0 \\ \vec{X}(0) = \vec{X}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Oletetaan, että $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ toteuttaa $a_{jk} = a_{kj}$ eli $A = A^T$. Tällöin on olemassa matriisi $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V^{-1} = V^T$ jolle

$$V^{-1}AV = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(viite: Lineaarialgebra 2), λ_j ovat A:n ominaisarvot, $A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$ jollekin $v_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

olkoon $\vec{z}(t) = V \cdot \vec{x}(t) = \left(z_j(t) \right)_{j=1}^{n}$

Silloin $\vec{z}^0 = V \vec{x}^0 = \left(z_j^0 \right)_{j=1}^{n}$

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = V^{-1} \Lambda V \vec{x}(t)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt} \left(V \vec{x}(t) \right) = \Lambda \left(V \vec{x}(t) \right)$$

eli

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = \Lambda \vec{z}(t).$$

Tällöin $\vec{z}(t)$:n komponentit $z_j(t)$ toteuttavat

$$\frac{d}{dt} z_j(t) = \lambda_j z_j(t)$$
$$z_j(0) = z_j^0$$

eli

$$z_j(t) = e^{\lambda_j t} \cdot z_j^0$$

Määrittelemme diagonaalimatriisille Λ ja matriisille A

$$e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \overset{\text{HT}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t\Lambda)^k$$

ja

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k$$

Näemme, että

$$A^k = (V^{-1}\Lambda V)^k$$

$$= V^{-1}\Lambda V \cdot V^{-1}\Lambda V \cdot \ldots \cdot V^{-1}\Lambda V$$

$$= V^{-1}\Lambda^k V$$

Jolloin saamme

$$e^A = V^{-1} e^{\Lambda} V.$$

Nyt ratkaisulle $z(t)$ pätee

$$\vec{z}(t) = e^{t\Lambda}\vec{z}^{\,0}, \qquad \vec{z}^{\,0} = V\vec{x}^{\,0}$$

jolloin

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= V^{-1}\vec{z}(t) \\ &= V^{-1} e^{t\Lambda} \cdot V\vec{x}^{\,0} \\ &= e^{At}\vec{x}^{\,0}.\end{aligned}$$

Osittaisderivaatat

Kun $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määrittelemme

osittaisderivaatat koordinaateissa $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{f:n derivaatta muuttujan } x_j \text{ suhteen}$$

Esim Kun $n = 2$, merkitään

$\vec{x} = (x, y)$. Merkitsemme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h},$$

kun raja-arvot ovat olemassa.

Tapauksessa $n = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{df}{dx}$ on

tavallinen derivaatta.

ESIMERKKEJÄ

Kun $n = 2$, $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2xy + 3y^2\right) = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 2xy + 3y^2\right) = 2y + 6y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 + 2xy + 3y^2\right) = 6$$

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Merkitsemme

$$f \in C^k(\bar{\Omega}), \quad k \in \mathbb{N}$$

jos osittaisderivaatat

$$g_q(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{q_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{q_n} f(\vec{x})$$

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad q_j \in \mathbb{N}$$

ovat olemassa kaikille $x \in \Omega$, $\sum_{j=1}^{n} q_j \leq k$

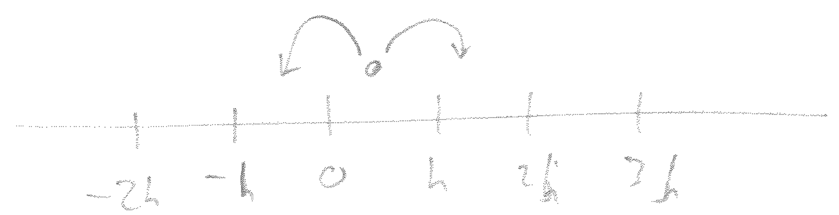
ja on olemassa jatkuvat funktiot

$\overline{g_q} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ joille

$$\overline{g_q}\big|_{\Omega} = g_q.$$

Satunnaiskävelijä

Jaetaan reaaliakseli $\mathbb{R}$ väleihin $I_{j,h} = [jh, (j+1)h)$, $h>0$. Tarkastellaan partikkelia tai satunnaiskävelijää, joka hetken t_0 välein hyppää joko oikealle tai vasemmalle todennäköisyydellä $1/2$



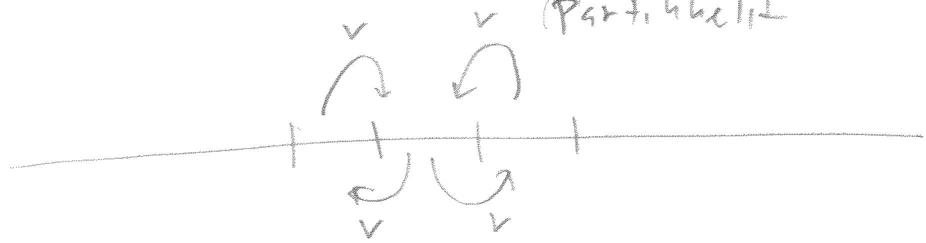
Tarkastellaan tilannetta jossa satunnaiskävelijöitä on suuri määrä.

Olkoon $u_j^h(t)$ partikkelien suhteellinen tiheys välillä $I_{j,h}$ hetkellä t.

Olkoon v^h nopeus jolla partikkelitiheys siirtyy oikealle ja vasemmalle.

Saamme mallin

$$(1) \qquad \frac{du_j^h}{dt}(t) = v^h \Big[\underbrace{u_{j+1}^h(t) + u_{j-1}^h(t)}_{\text{väliin saapuvat (partikkelit)}} - \underbrace{2u_j^h(t)}_{\text{poistuvat partikkelit}} \Big]$$



Oletetaan, että $\nu^h = h^2$ ja merkitään

$$x_j^h = jh, \quad h \in \mathbb{R}_+, \ j \in \mathbb{Z}$$

$$u^h(x_j^h, t) = u_j^h(t).$$

Tarkastellaan tapausta, jossa $h \to 0$

Oletamme, että on olemassa rajafunktio

$U(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $U \in C^3(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$

jolle

$$U(x,t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x_j^h \to x}} u^h(x_j^h, t).$$

Kerrataan seuraavaksi Taylorin kaavan seurauksia

Kun $f \in C^3(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)\, h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)\, h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{df}{dx}(x)\, h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)\, h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Joten

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \mathcal{O}(h)$$

Teemme approksimaation kun $|x - x_j^h| < h$,

$$(3) \quad \frac{u^h(x_{j+1}^h, t) - 2u^h(x_j^h, t) + u^h(x_{j-1}^h, t)}{h^2}$$

$$\approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}$$

$$\approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O(h)$$

ja

$$(3) \quad \frac{\partial u^h(x_j^h, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O(h)$$

Yhtälöt (1), (2), (3) antavat

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

kun $h \to 0$.

yhtälö (4) mallittaa diffuusiota (mustetta nesteessä) tai lämpötilaa aineessa jossa tapahtuu lämmönjohtumista.

Useammassa ulottuvuudessa, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ yhtälö saa muodon

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in D, \; t \geq 0$$

missä

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 u.$$

Esim $\mathbb{R}^3$:ssa

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$