6. Fourier-sarjat

Tavoite: trigonometristen funktioiden lineaarikombinaatiot eli *Fourier-sarjat* ja *Weierstrassin approksimaatiolauseen.*

Fourier-sarja 6.1

Olkoon $f \in L_2[-\pi, \pi]$ reaaliarvoinen.

Tavoite: approksimoidaan f :ää *trigonometrisellä polynomilla*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\, a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \,]$$

normin

$$\|f\|_2 = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

mielessä eli etsitään kertoimet a_k, b_k siten, että

$$\|f - S_n\|_2^2$$

olisi pienin mahdollinen. Kaikilla $j, k = 1, \ldots, n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \, dx = 0 \ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \cos(kx) \, dx = 0 \ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(kx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \sin(kx) \, dx = 0 \ , \qquad \text{kun } j \neq k \ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) \, dx = \pi \ ,$$

eli funktiot

$$q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, , \ q_{2j-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(jx) \, , \ q_{2j}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(jx) \, ,$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots$$

ovat L_2-ortonormaalit. Nyt lauseen 5.9 nojalla paras approksimaatio on

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n} \langle f, q_k \rangle \, q_k \ .$$

Siis parhaat kertoimet ovat

$$(0.1)\qquad \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \cos(kx) \, dx \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \sin(kx) \, dx \ , \qquad k = 1, 2, \ldots \ . \end{aligned}$$

Approksimointivirheelle saadaan Pythagoraan lauseen avulla
(0.2)

$$\|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^{2n} |\langle f, q_j \rangle|^2 = \|f\|_2^2 - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

Erityisesti kaikilla n pätee *Besselin epäyhtälö*

$$(0.3)\qquad \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \ .$$

Määritelmä f:n *Fourier-sarjaksi* kutsutaan sarjaa
(0.4)

$$f \sim \tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\, a_k\, \cos(kx) + b_k\, \sin(kx)\,]\ ,$$

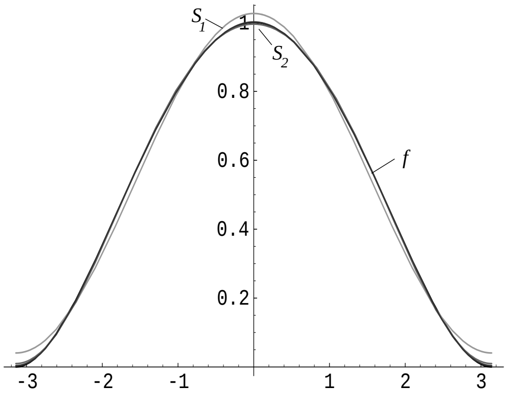
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,dx\ , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(kx)\,dx\ ,$$

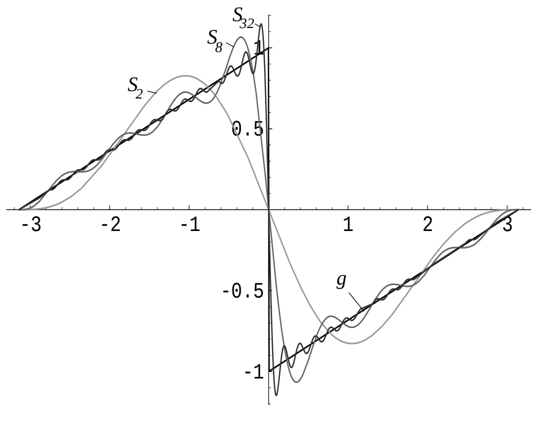
riippumatta siitä, suppeneeko se vai ei.

Funktiolle $g(x) = x/\pi - \operatorname{sgn} x$ saadaan sarjat

$$g \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi k}\,\sin(kx)\ .$$

(Katso kuva, suppenemisnopeus riippuu funktion sileydestä.)





6.2. Fourier-sarjan ominaisuuksia

Tavoite on näyttää:

$$\text{Kun } f \in L_2 \text{ niin } \lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0.$$

Seuraavassa f on kompleksiarvoinen.

Koska $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Fourier-sarja voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{ikx} \ ,$$

$$\begin{aligned} c_k &= \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\, f(x) \cos(kx) - i\, f(x) \sin(kx) \,]\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx \ . \end{aligned}$$

Saadaan *kompleksinen* Fourier-sarja:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{ikx} \ , \qquad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx \ . \tag{0.5}$$

Vaikka f olisi määritelty vain välillä $[-\pi, \pi]$, sen Fourier-sarja on määritelty kaikilla x ja se on 2π -periodinen. seuraavassa f jatketaan 2π -periodiseksi: $f(x + l\, 2\pi) = f(x)$, $l \in \mathbb{Z}$.

Merkitään $a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$.

Jos f on *parillinen funktio*: $f(-x) = f(x)$,

- f parillinen $\Longrightarrow$ $b_k(f) = 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$
- f pariton $\Longrightarrow$ $a_k(f) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$

Jos f on 2π -periodinen ja jatkuvasti derivoituva niin:

$$\begin{aligned} a_k(f') &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(k\,x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi} \Big/_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k\,x) + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(k\,x)\,dx \\ &= k\,b_k(f) \ , \end{aligned}$$

sillä $f(-\pi) = f(\pi)$. Samoin

$$b_k(f') = -k\,a_k(f) \, .$$

Yleisesti derivaatan Fourier-sarjat saadaan helposti funktion Fourier-sarjasta derivoimalla sarjaa termeittäin:

$$\begin{aligned} a_k(f') &= k\,b_k(f) \ , & b_k(f') &= -k\,a_k(f) \ , \\ a_k(f'') &= -k^2\,a_k(f) \ , & b_k(f'') &= -k^2\,b_k(f) \ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lemma 0.1. *(Lemma 6.1) Jos sarjat*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty \ ,$$

suppenevat (itseinen suppeneminen) niin Fourier-sarja

$$\tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\, a_k \, \cos(kx) + b_k \, \sin(kx)\,]$$

suppenee tasaisesti.

Huom. 6.2 Tasainen suppeneminen tarkoittaa: $\lim_{n\to\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$.

Tod. Kaikilla k pätee

$$|\, a_k \, \cos(kx) + b_k \, \sin(kx)\, | \le |a_k| + |b_k| \ .$$

Siispä jokaisella x Fourier-sarjalla on suppeneva majorantti $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$. Siis summa

$$S(x) = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\, a_k \, \cos(kx) + b_k \, \sin(kx)\,]$$

on olemassa kaikilla x . Annetulle $\varepsilon > 0$ olkoon N_a ja N_b siten, että

$$\sum_{k=N_a+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2 \ , \qquad \sum_{k=N_b+1}^{\infty} |b_k| < \varepsilon/2 \ ,$$

ja $n \geq N_\varepsilon = \max(N_a, N_b)$. Tällöin kaikilla x pätee

$$
\begin{aligned}
|S_n(x) - S(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} [\, a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \,] \right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \\
&\leq \sum_{k=N_a+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N_b+1}^{\infty} |b_k| \leq \varepsilon \ ,
\end{aligned}
$$

eli sarja suppenee tasaisesti. $\square$

Huom. 6.3 Koska edellisen lemman tilanteessa sarja suppenee tasaisesti, on rajafunktio S jatkuva. Koska tasaisesti suppenevan sarjan voi integroida termeittäin, saadaan $a_n(S) = a_n$ jne.

Seuraava lause antaa käyttökelpoisen riittävän ehdon tasaiselle suppenemiselle.

Lause 0.2. *(Lause 6.4) Olkoon f jatkuva, 2π -periodinen ja $f' \in L_2[-\pi,\pi]$. Tällöin f :n Fourier-sarja suppenee tasaisesti.*

Tod. Olkoot a_k, b_k f :n ja $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ f' :n Fourier-kertoimet. Tällöin kaikilla $k \geq 1$ pätee:

$$a_k = \frac{1}{k}\,\tilde{b}_k \qquad \text{ja} \qquad b_k = -\frac{1}{k}\,\tilde{a}_k\,.$$

Besselin epäyhtälöstä saadaan

$$\tfrac{1}{2}\,|\tilde{a}_0|^2 + \sum_{k=1}^{n}\big(\,|\tilde{a}_k|^2 + |\tilde{b}_k|^2\big) \leq \frac{1}{\pi}\,\|f'\|_2^2\,.$$

Nyt $|\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle| \leq \|\boldsymbol{\xi}\|\,\|\boldsymbol{\eta}\|$, $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^n$. Valitaan $\boldsymbol{\xi} = (|\tilde{b}_1|, |\tilde{b}_2|, \ldots, |\tilde{b}_n|)$, $\boldsymbol{\eta} = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n})$, jolloin Besselin epäyhtälöstä

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,|\tilde{b}_k| = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle \leq \|\boldsymbol{\xi}\|\,\|\boldsymbol{\eta}\|$$

$$= \big(|\tilde{b}_1|^2 + |\tilde{b}_2|^2 + \cdots + |\tilde{b}_n|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|f'\|_2\,.$$

Tässä käytettiin:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 2\,.$$

Siispä $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ suppenee. Samoin nähdään että $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ suppenee, ja väite seuraa Lemmasta 6.1. $\square$

Huom. Funktion on edellä oltava jatkuva ja derivoituva 2π -periodisena, esim. $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$ ei ole

6.3 Weierstrassin approksimaatiolause

Lause 0.3 (Weierstrassin approksimaatiolause)**.** *Olkoon f jatkuva välillä $[-1,1]$. Tällöin jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa polynomi p_n siten, että*

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon \ , \qquad \textit{kaikilla } \ x \in [-1,1] \ .$$

Tätä kutsutaan *tasaiseksi* approksimoinniksi. Ei toimi $C(\mathbb{R})$, $C(D)$, $D \subset \mathbb{C}$ tai $C((0,1])$.

Todistamme ensin vastaavan lauseen trigonometrisille polynomeille.

Lause 0.4. *Olkoon f jatkuva ja 2π-periodinen. Tällöin jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa trigonometrinen polynomi t_n siten, että*

$$|f(x) - t_n(x)| < \varepsilon \ , \qquad \textit{kaikilla } \ x \in [-\pi,\pi] \ .$$

Huom: Fourier-sarjan alkupää S_n *ei yleensä kelpaa* t_n:ksi suurellakaan n, sillä Fourier-sarjat eivät välttämättä suppene tasaisesti jatkuvallekaan f:lle.

Tod. Olkoon $\varepsilon > 0$. Asetetaan

$$c_n = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(u/2)^{2n} \, du \Big)^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot 2n$$

ja näytetään, että

$$t_n(x) = c_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u/2)^{2n} f(x-u) \, du$$

on etsitty trigonometrinen polynomi kun n on riittävän suuri.

(HUOM: Merkki eri tavalla kuin luentomonisteessa)

Koska $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ on jatkuva ja $[-\pi,\pi]$ suljettu ja rajoitettu väli, f on tasaisesti jatkuva: Kaikilla ε on olemassa $\delta > 0$

siten, että $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$ kaikilla x,y, joille $|x-y|\le\delta$. Selvästi

$$c_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(u/2)^{2n}\,f(x)\,du=f(x)\,,$$

joten

$$\begin{aligned}
&|f(x)-t_n(x)|=\left|c_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(u/2)^{2n}\,[\,f(x)-f(x-u)\,]\,du\right|\\
&\le c_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(u/2)^{2n}\;|\,f(x)-f(x-u)\,|\;du\\
&=c_n\int_{-\delta}^{\delta}\cos(u/2)^{2n}\;|\,f(x)-f(x-u)\,|\;du\\
&\qquad+c_n\left(\textstyle\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)\cos(u/2)^{2n}\;|\,f(x)-f(x-u)\,|\;du\\
&=I_{[-\delta,\delta]}+I_{[-\pi,-\delta]}+I_{[\,\delta,\,\pi]}\ .
\end{aligned}$$

Kun $|u|\le\delta$, pätee $|f(x)-f(x-u)|\le\varepsilon/2$, joten

$$I_{[-\delta,\delta]}\le\frac{1}{2}\,\varepsilon\,c_n\int_{-\delta}^{\delta}\cos(u/2)^{2n}\,du<\frac{1}{2}\,\varepsilon\,c_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(u/2)^{2n}\,du=\frac{1}{2}\,\varepsilon\,.$$

Olkoon $\eta=\cos^2(\delta/2)$ ja $M=\|f\|_\infty$. Kun $\delta\le|u|\le\pi$, pätee $\cos^2(u/2)\le\eta$, joten

$$I_{[-\pi,-\delta]}+I_{[\,\delta,\,\pi]}\le c_n\,2M\,2\pi\,\eta^n\ .$$

Nyt[1] $c_n=\frac{2\cdot4\cdot\dots\cdot(2n-2)2n}{2\pi\cdot1\cdot3\cdot\dots\cdot(2n-1)}<n/\pi$. Koska $\eta<1$, saadaan $\lim_{n\to\infty}n\,\eta^n=0$ ja riittävän suurilla n

$$I_{[-\pi,-\delta]}+I_{[\,\delta,\,\pi]}\le4M\,n\,\eta^n<\frac{1}{2}\,\varepsilon$$

---

[1] $J_n=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(u/2)^{2n}\,du=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(u/2)\cos(u/2)^{2n-1}\,du$
$=\big/_{-\pi}^{\pi}2\sin(u/2)\cos(u/2)^{2n-1}+(2n-1)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(u/2)\cos(u/2)^{2n-2}\,du$
$=0+(2n-1)\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(u/2)^{2n-2}-\cos(u/2)^{2n})\,du=(2n-1)(J_{n-1}-J_n)\,,$
josta $J_n=\frac{2n-1}{2n}\,J_{n-1}$

(riippumatta x:stä) ja lopulta $|f(x) - t_n(x)| < \varepsilon$ kaikilla x.

Vielä on näytettävä, että t_n on trigonometrinen polynomi. Nyt

$$\begin{aligned} \cos(u/2)^{2n} &= 2^{-2n}(e^{iu/2} + e^{-iu/2})^{2n} \\ &= 2^{-2n}(e^{iu} + 2 + e^{-iu})^n = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}\, e^{iku} du \end{aligned}$$

sopivilla kertoimilla $d_{n,j}$ (HT: ei sinejä). Täten (alla sijoitys $s = x - u$, ks. Huom. 6.8 alla)

$$\begin{aligned} t_n(x) &= c_n \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}\, e^{iku}\, f(x-u)\, du \\ &= \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}\, c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-s)}\, f(s)\, ds \\ &= \sum_{k=0}^{n} d_{n,k} e^{ikx}\, c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iks}\, f(s)\, ds \end{aligned}$$

on trigonometrinen polynomi. □

huom 6.8 Edellä muuttujanvaihdossa $s = x - u$ integroimisrajoja ei muutettu. Näin voi tehdä, kun integroi periodisia funktioita: jos g on T-periodinen, niin

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} g(x)\, dx &= \int_a^T g(x)\, dx + \int_T^{a+T} g(x)\, dx \\ &= \int_a^T g(x)\, dx + \int_0^a g(x)\, dx = \int_0^T g(x)\, dx\ . \end{aligned}$$

Toisin sanoen, on aivan sama, minkä T-pituisen välin yli integroidaan.

Todistamme Weierstrassin lauseen perusmuodon.

Tod. Olkoon f jatkuva välillä $[-1,1]$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{f}(x) = f(\cos(x))$ ja t_n edellisen lauseen todistuksen trigonometrinen polynomi jolle

$$||\tilde{f} - t_n||_\infty < \varepsilon$$

Koska $\tilde{f}$ on parillinen, voimme valita t_n:n parilliseksi ts. kosinisummaksi. Näin saamme approksimaation

$$\left| f(\cos(x)) - \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} \cos(jx) \right| < \varepsilon \qquad \text{kaikilla } x \in [0,\pi] \, .$$

Harjoitustehtävän 1 mukaan $\cos(jx) = T_j(\cos(x))$ eli $\cos(jx)$ on $\cos(x)$:n j-asteinen polynomi. Täten, asettamalla

$$p_n(s) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} \, T_j(s)$$

saadaan polynomi, jolle

$$|f(s) - p_n(s)| < \varepsilon \qquad \text{kaikilla } s \in [-1,1] \, .$$

$\square$

6.4 Fourier-sarjan suppeneminen Aiemmin todettiin, että jatkuvankaan funktion Fourier-sarja ei aina suppene tasaisesti, mutta:

Lause 0.5. *(Lause 6.10) Jos* f *on* 2π *-periodinen ja jatkuva, niin*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0 \ .$$

Tod. Annetulle $\varepsilon > 0$ Weierstrassin lauseen mukaan löytyy trigonometrinen polynomi t_n siten, että

$$|f(x) - t_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \ .$$

Koska S_k on f:ää $\|\cdot\|_2$-normin mielessä parhaiten approksimoiva k-asteinen trigonometrinen polynomi, saadaan kaikilla $k \geq n$

$$\begin{aligned} \|f - S_k\|_2^2 \ &\leq \|f - S_n\|_2^2 \leq \|f - t_n\|_2^2 \\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - t_n(x)|^2 \, dx \\ &\leq \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \, dx = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

eli $k \geq n \implies \|f - S_k\|_2 \leq \varepsilon$. □

Huomautus 0.6. Edellinen tulos pätee kaikille $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Tämä seuraa siitä, että jokaista L_2-funktiota voidaan approksimoida $\|\cdot\|_2$-normin mielessä mielivaltaisen tarkasti jatkuvalla funktiolla. Tämän vaatii mittateoriaa ja todistus esitetään kurssilla *Modernin analyysin perusteet.* Siis pätee:

Lause: jokaisen $f \in L_2[-\pi, \pi]$ Fourier-sarja suppenee kohti f:ää $\|\cdot\|_2$-normin mielessä.

Kirjottamalla

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = a_k + ib_k$$

saamme*Parsevalin yhtälön*

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilx} \right\rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k c_l \left\langle e^{ikx}, e^{ilx} \right\rangle \\ &= \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \end{aligned}$$

Jos f ja g ovat vain neliöintegroituvia ja niillä on samat Fourier-kertoimet, saadaan $\|f - g\|_2 = 0$. Tämä ei vielä implikoi, että $f = g$,, ,mutta $f = g$) L_2-*mielessä*. Kun haluamme erityisesti muistuttaa tästä sopimuksesta, niin merkitään $f \underset{2}{=} g$. Siispä kaikille $f \in L_2[-\pi, \pi]$ saadaan

$$f \underset{2}{=} \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\, a_k \, \cos(kx) + b_k \, \sin(kx) \right] .$$

6.5 Fourier'n menetelmä ODY:lle Vuosina 1804-1807 lämpöyhtälön ratkaisemiseksi. Alla esimerkkejä

Esim. 6.12 Reuna-arvotehtävä:

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha\, u(x) = f(x)\ , & x \in (0,\pi)\,, \\ u(0) = u(\pi) = 0\,. \end{cases}$$

Voidaan ratkaista myös Greenin funktioiden avulla. Tutkitaan ratkaisua Fourier-sarjan avulla.

Reuna-ehtojen takia, yrite on sinisarjana. Tämän takia ajatellaan u ja f jatketuksi *parittomana* välille $[-\pi, 0]$. Tällöin u ja u'' ovat parittomia jolloin ne voidaan esittää sinisarjana. Olkoon siis

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$$

ja

$$u \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\ ,$$

jolloin

$$u'' \sim -\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, b_n \sin(nx)\,.$$

Diff. yhtälöstä saadaan

$$(n^2 + \alpha)\, b_n = c_n\ ,$$

missä

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx\ .$$

Jos esimerkiksi $f(x) = 1$, saadaan

$$c_{2k} = 0, \qquad c_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$$

ja

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\,((2k+1)^2+\alpha)\,\pi} \sin((2k+1)\,x) \; .$$

Tässä kirjoitettiin $u(x) = \dots$, eikä $u \sim$„ sillä $c_k = O(1/k^3)$, ja sarja suppenee tasaisesti.

u'' :n kertoimet ovat $O(1/n)$, joten sen Fourier-sarja ei välttämättä suppene tasaisesti.

Täten saatu u toteuttaa yhtälön hieman heikossa mielessä. Tällaista kutsutaan *formaaliksi ratkaisuksi*. Jatkoanalyysillä voidaan ratkaisusta näyttää enemmän.

Huomautus 0.7. Tehtävälle

$$a(x)\,u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \; , \qquad u(0) = u(\pi) = 0 \, ,$$

sinisarja ei toimi, vaan meidän tulee käyttää ominaisfunktioita.

Jos funktio on määritelty jollakin muulla välillä kuin $[-\pi, \pi]$ (tai $[0, \pi]$), voidaan se kehittää sarjaksi muuttujan vaihdolla.

Esim. 6.14 Vakiokertoiminen aaltoyhtälö (HUOM: poikkeaa moniseesta

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \; , \qquad x \in [0, L] \, , \; t > 0 \, ,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = 0 \, .$$

Etsitään *separoituvia* eli muotoa $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ olevia ratkaisuja. Sijoittamalla yhtälöön saamme

$$X(x)\,T''(t) = X''(x)\,T(t) \; ,$$

josta jakamalla saadaan

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k \; ,$$

missä k on vakio. Jotta u lisäksi toteuttaisi reunaehdot, tarvitaan

$$T''(t) = k\,T(t)\ , \qquad X''(x) = k\,X(x)\,,\ X(0) = X'(L) = 0\ .$$

Löydämme ratkaisut

$$X_n(x) = \sin((n - \tfrac{1}{2})\frac{\pi}{L}\,x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

jotka vastavat k:n arvoja

$$k_n = -(n - \tfrac{1}{2})\frac{\pi}{L}$$

Muilla k:n arvoilla ei ratkaisuita. Vastaavat T-ratkaisut ovat

$$T_n(t) = A_n \cos(k_n t) + B_n \sin(k_n t)$$

Siis

$$u_n(x,t) = b_n\ \cos(k_n t)\ \sin(k_n\,x)$$
$$u_n(x,t) = d_n\ \sin(k_n t)\ \sin(k_n x)$$

toteuttavat differentiaaliyhtälön ja reunaehdot. Yritetään siis ratkaisua muodossa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) + w_n(x,t)\ .$$

Tämä toteuttaa differentiaaliyhtälön ja reunaehdot (mikäli sarja suppenee). Alkuehto $u_t(x,0) = f(x)$ antaa:

$$d_n = 0$$

Alkuehto $u(x,0) = f(x)$ antaa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \sin(k_n x) = f(x) \quad k_n = (n - 1/2)\pi/L.$$

Tämän sarjan tulisi siis esittää f:ää.

Näin saadaan, kun (ks. tehtävä HT 1)

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\,\sin(k_n(n-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{L}\,s)\,ds.\ ,$$

Tehtäviä 0.0.

1. Näytä, että $f \in L_2[0,L]$ voidaan esittää sarjana

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\,\sin((n-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{L}\,x)$$

missä

$$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin((n-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{L}\,x)\,dx\ .$$

Vihje: määrittele $f(x) = f(2L-x)$, kun $x \in [L, 2L]$, jatka parittomasti välille $[-2L, 0]$ ja lopulta $4L$-periodiseksi.