5. Funktionaalianalyysiä Johdanto: alkuarvotehtävää

(1.1) $\quad x'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))\,, \qquad t \in [0,T]\,,\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n\,,$

missä $\boldsymbol{f} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on sileä. Tämä on voidaan kirjoittaa integraaliyhtälöksi

(1.2)
$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau))\, d\tau$$

ja ratkaista tämä iteroimalla (Picard-Lindelöf).

Tulkinta: Olkoon $V = C([0,T], \mathbb{R}^n)$ kaikkien jatkuvien funktioiden $\boldsymbol{v} : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ joukko.

Määritellään *operaattori* (kuvaus) $\boldsymbol{F} : V \to V$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{v}(\tau))\, d\tau\,, \qquad t \in [0,T]\,.$$

Tällöin (1.2) saa muodon

(1.3)
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

eli $\boldsymbol{x}$ on operaattorin $\boldsymbol{F}$ *kiintopiste.*

5.1 Määritelmiä, normiavaruus Vektoriavaruus V on joukko, jossa on määritelty alkioiden eli vektoreiden yhteenlasku ja skalaarilla kertominen

$$x, y \in V\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha x + \beta y \in V$$

(tai $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) Avaruuden V:n *dimensio* on

$$dim(V) = \sup\{n : \text{ on olemassa lin. riippumattomat } x_1, \ldots, x_n \in V\}.$$

V on *normiavaruus*, jos on olemaasa normi $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, jolle

$$\begin{aligned} \text{i) } & \|x\| \geq 0 \text{ ja } \|x\| = 0 \implies x = 0, \\ \text{ii) } & \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|\,, \\ \text{iii) } & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,. \end{aligned}$$

esim. 5.1 Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^n$ (tai $\mathbb{C}^n$) on useita normeja. Esimerkiksi

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|\,, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\,.$$

Usein merkitsemme $|\boldsymbol{x}| = \|\boldsymbol{x}\|_2$.

esim. 5.2

$$\mathcal{P}_n = \{p : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j\}.$$

$dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$.

esim. 5.3 $\mathcal{P}_\infty = \cup_{n=1}^\infty \mathcal{P}_n$. Dimensio ääretön.

esim. 5.4 $C[-1, 1]$ normilla

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|\,.$$

Dimensio ääretön.

esim. 5.5

$$\ell_1 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \;:\; ||x||_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}\,.$$

esim. 5.6 $L_1[a,b]$. Funktiot, $|f(x)|$ on integr. ja

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)|\; dx < \infty.$$

Tämä on normi, jos sovimme, että $f = g$ L_1-mielessä, jos $\int_a^b |f(x) - g(x)|\; dx = 0$. Esim. $f-g$ poikkeaa nollasta äärellisen monessa pisteessä.

Olkoon V normiavaruus.

- Kun $x \in V$, $r > 0$, merkitään $B_r(x) = \{ y \in V \mid \|y - x\| < r \}$. Eli $B_r(x)$ on avoin (reunaton) x -keskinen r -säteinen *pallo.*
- Joukko $A \subset V$ on *avoin*, jos jokaiselle $x \in A$ on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $B_\varepsilon(x) \subset A$.
- Joukko $C \subset V$ on *suljettu*, jos $V \setminus C := \{ x \in V \mid x \notin C \}$ on avoin.
- Sanotaan, että jono $\{ v^j \}_{j=1}^{\infty} \subset V$ *suppenee* V:ssä kohti alkiota $v \in V$, jos
$$\lim_{n \to \infty} \|v^n - v\| = 0 \ .$$
Tällöin merkitään $\lim_{j \to \infty} v^j = v$.
- Jos $B \subset V$ on suljettu, jokaisen suppenevan jonon, jonka alkiot kuuluvat B :hen, raja-arvo kuuluu myös B :hen (HT).

5.2 Sisätuloavaruus

Vektoriavaruus E on *sisätuloavaruus*, jos on funktio $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$, jolle

i) $\langle x, x\rangle \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty)$, ja $\langle x, x\rangle = 0 \implies x = 0$,
ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
iii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle$.

esim. 5.7 Olkoon $\boldsymbol{l}_2 = \{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty\}$. Määritellään

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n} \ .$$

Tämä summa suppenee itseisesti, sillä

$$|x_n \overline{y_n}| \le (|x_n|^2 + |y_n|^2)/2 \, .$$

(summaa kummatkin puolet)

Esim. 5.7

$$L_2[a, b] = \{ f : [a, b] \to \mathbb{C} : \ |f(x)|^2 \text{ integroituva ja } \int_a^b |f(t)|^2 \, dt < \infty\} \, ,$$

Määritellään

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t) \, \overline{g(t)} \, dt \ .$$

Tämä integraali suppenee, kun $f, g \in L_2[a, b]$ *Sovitaan* että funktio $f = g$ on L_2-mielessä, jos $\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \, dt = 0$. Täten *samaistetaan* kaikki funktiot $f, \tilde{f}$ joilla $\|f - \tilde{f}\|_2 = 0$.

Sisätuloavaruudessa E määritellään normi asettamalla $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Ehto i) toteutuu. Ehto ii) saadaan

$$\|\lambda\, x\| = \sqrt{\langle \lambda\, x, \lambda\, x\rangle} = \sqrt{\lambda\, \overline{\lambda}\, \langle x, x\rangle} = |\lambda|\ \|x\|\ .$$

Seuraavaksi näytämme ehdon iii). Tätä varten

Lemma 1.1. *(Schwarzin epäyhtälö) Kaikilla* $x, y \in E$

$$| \langle x, y\rangle | \leq \|x\|\, \|y\| \tag{1.4}$$

Tod: Olkoon $||y|| > 0$ ja $\alpha = \langle x, y\rangle / \|y\|^2$, jolloin

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \alpha\, y\|^2 = \langle x - \alpha\, y\, ,\, x - \alpha\, y\rangle = \langle x, x\rangle - \alpha\ \langle y, x\rangle - \overline{\alpha}\ \langle x, y\rangle + \\ &\quad + |\alpha|^2\ \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\,\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\ , \end{aligned}$$

eli $\|x\|^2\, \|y\|^2 \geq |\langle x, y\rangle|^2$.

Nyt kolmioepäyhtälö iii) saadaan laskulla

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\, \|x\|\, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\ . \end{aligned}$$

Sisätuloavaruuden normi toteuttaa

- Pythagoraan lause: $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
- Suunnikasyhtälö: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

Merkitään:

- $x \perp y$, kun $\langle x, y\rangle = 0$,
- $x \perp B$, kun $\langle x, y\rangle = 0$ kaikilla $y \in B$,
- $A \perp B$, kun $\langle x, y\rangle = 0$ kaikilla $x \in A$, $y \in B$,
- $A^{\perp} = \big\{x \in E \,\big|\, x \perp A\big\}$.

Joukko $\{q_1, \dots, q_n\} \subset E$ on *ortonormaali*, jos

$$\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{kun } \ i = j \\ 0 & \text{kun } \ i \neq j \end{cases} .$$

Lause 1.2. *Olkoon* $\{q_1, \dots, q_n\}$ *ortonormaali ja* $x \in E$. *Tällöin*

$$\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, q_i \rangle \, q_i - x \| \leq \| \sum_{i=1}^{n} c_i \, q_i - x \|. \tag{1.5}$$

Kaavassa (1.5) ei voi päteä yhtäsuuruutta jos $c_i \neq \langle x, q_i \rangle$ *jollakin* i.

Siis $a_i = \langle x, q_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. ratkaisevat tehtävän

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \; \|x - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, q_i\| \; .$$

Tod. Olkoon $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, q_i \rangle \, q_i$ ja $z = \sum_{i=1}^{n} c_i \, q_i$. Tällöin kaikilla j pätee:

$\langle y - x, q_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, q_i \rangle \, \langle q_i, q_j \rangle - \langle x, q_j \rangle = \langle x, q_j \rangle - \langle x, q_j \rangle = 0$.

Koska $z - y = \sum_{j=1}^{n} a_j q_j$, $a_j = \langle x, q_j \rangle - c_j$ saadaan

$$\langle y - x, z - y \rangle = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} \, \langle y - x, q_j \rangle = 0 \; ,$$

josta Pythagoraan lauseella

$\|z - x\|^2 = \|z - y + y - x\|^2 = \|z - y\|^2 + \|y - x\|^2 \geq \|y - x\|^2$.

Yhtäsuuruus ei voi päteä jos $z \neq y$. $\square$

Vektoreiden $x_1, \ldots, x_n$ *viritelmä*, eli vektoreiden $x_1, \ldots, x_n$ virittämä aliavaruus on

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \{\textstyle\sum_{i=1}^n c_i\, x_i \,|\, c_i \in \mathbb{R} \text{ (tai } \mathbb{C})\} \ .$$

Seuraus 1.3. *Kun* $\{q_1, \ldots, q_n\}$ *on ortonormaali, niin*

$$x \in V(q_1, \ldots, q_n) \implies x = \textstyle\sum_{i=1}^n \langle x, q_i \rangle\, q_i \ .$$

Olkoon jono $\{x_1, x_2, \ldots\}$ lineaarisesti riippumaton jono, ts. $x_1 \neq 0$ ja kaikilla $n \geq 1$ pätee:

$$x_{n+1} \notin V(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Gram-Schmidt –ortogonalisointi: Etsitään ortonormaalit $\{q_1, q_2, \ldots\}$ siten, että

$$q_n \in V(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{ja} \quad x_n \in V(q_1, \ldots, q_n) \ .$$

Nämä saadaan rekursiivisesti:

- $q_1 = x_1/\|x_1\|$
- $u_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle x_{k+1}, q_j \rangle\, q_j \qquad k = 1, 2, \ldots$
- $q_{k+1} = u_{k+1}/\|u_{k+1}\|$

5.3 Banach–avaruus

Määritelmä Normiavaruuden V jono $\{v^j\}_{j=1}^{\infty}$ on *Cauchy–jono*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa j_ε siten, että

$$j,k \geq j_\varepsilon \implies \|v^j - v^k\| < \varepsilon \ .$$

Jos $\{v^j\}_{j=1}^{\infty}$ on suppeneva jono: $\lim_{j\to\infty} v^j = v$, niin annetulle $\varepsilon > 0$ on olemassa j_ε siten, että $j \geq j_\varepsilon \implies \|v^j - v\| < \varepsilon/2$. Tällöin

$$j,k \geq j_\varepsilon \implies \|v^j - v^k\| \leq \|v^j - v\| + \|v - v^k\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

Siis: suppeneva jono on aina Cauchy–jono.

Määritelmä. Sanotaan, että normiavaruus V on *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchy jonot suppenevat. Täydellistä normi avaruutta kutsutaan *Banach–avaruudeksi*. Sisätulo-avaruutta, jonka normi on täydellinen, sanotaan *Hilbert–avaruudeksi*.

Lause 1.4. *(lause 5.12) $\mathbb{R}^n$ on täydellinen (eli Banach–avaruus). Normina mikä tahansa normi.*

Tod. Normille $\|\cdot\|_2$, muut samaan tapaan. Olkoon $\left\{\boldsymbol{x}^j\right\}_{j=1}^{\infty}$ Cauchy–jono $\mathbb{R}^n$:ssä. Tällöin jokaiselle komponenttijonolle

$$\left\{(\boldsymbol{x}^j)_i\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}\,,\ i = 1, \ldots, n$$

pätee

$$\left|(\boldsymbol{x}^j)_i - (\boldsymbol{x}^k)_i\right| \leq \|\boldsymbol{x}^j - \boldsymbol{x}^k\|_2.$$

Siis jokainen komponenttijono on Cauchy-jono $\mathbb{R}$:ssä. $\mathbb{R}$ on täydellinen, joten jokaisella $i = 1, \ldots, n$ on olemassa $x_i^* \in \mathbb{R}$ siten, että $\lim_{j\to\infty}(\boldsymbol{x}^j)_i = x_i^*$. Asetetaan $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, jolloin

$$\lim_{j\to\infty} \|\boldsymbol{x}^j - \boldsymbol{x}^*\|_2 = \lim_{j\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|(\boldsymbol{x}^j)_i - x_i^*\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0\ ,$$

eli $\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{x}^*$. □

$\mathbb{R}^n$ Euklidisella normilla varustettuna on Hilbert–avaruus.

Samaan tapaan: $\boldsymbol{l}_2$ on täydellinen, siis Hilbert–avaruus.

Merkitään: $C[a,b]$ jatkuvien funktioden $[a,b] \to \mathbb{R}$ (tai $\mathbb{C}$) joukkoa ja normilla $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Lause 1.5. *$C[a,b]$ on Banach–avaruus.*

Tod. Olkoon $\{f^j\}_{j=1}^\infty$ Cauchy–jono $C[a,b]$:ssä. Tällöin jokaisella $x \in [a,b]$ $\{f^j(x)\}_{j=1}^\infty$ on Cauchy–jono $\mathbb{R}$:ssä, joten jokaisella x on olemassa $f(x) = \lim_{j\to\infty} f^j(x)$. Siis: jono f^j suppenee pisteittäin.

On näytettävä, että f on jatkuva ja että $f^j \to f$ normin mielessä.

f on Cauchy-jono, joten kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa j_ε siten, että
(1.6)
$$j,k \geq j_\varepsilon \implies \left|f^j(x) - f^k(x)\right| < \varepsilon \qquad \text{kaikilla} \qquad x \in [a,b].$$

Olkoon nyt $j > j_{\boldsymbol{e}}$. Silloin kaavan (1.6) nojalla kaikilla x

$$\left|f^j(x) - f(x)\right| = \lim_{k\to\infty} \left|f^j(x) - f^k(x)\right| \leq \varepsilon. \tag{1.7}$$

Olkoon $x_0 \in [a,b]$ mielivaltainen ja $j \geq j_\varepsilon$. Koska f^j on jatkuva, löytyy $\delta = \delta(x_0) > 0$ siten, että

$$|x - x_0| < \delta \implies \left|f^j(x) - f^j(x_0)\right| < \varepsilon \ ,$$

jolloin myös:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| \ &\leq \ \left|f(x) - f^j(x)\right| + \left|f^j(x) - f^j(x_0)\right| + \\ &\quad + \left|f^j(x_0) - f(x_0)\right| < 3\,\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Täten f on jatkuva pisteessä x_0. Siis f on jatkuva ja

$$\lim_{j\to\infty} \|f^j - f\| = 0\,.$$

$\square$

Huomaa: Yllä ei voi käyttää avaruutta $\mathcal{P}_\infty$, sillä rajafunktion, joka olisi jatkuva, muttei välttämättä polynomi. $\mathcal{P}_\infty$ ei ole täydellinen.

Huomautus 1.6. Edellinen lause pätee jos $[a,b]$ on korvattu mielivaltaisella $\mathbb{R}^d$:n suljetulla ja rajoitetulla osajoukolla.

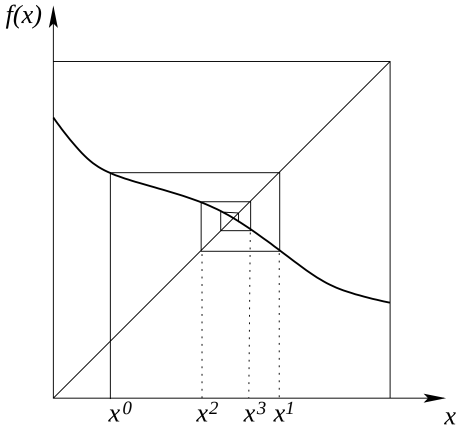
Kurssilla Modernin analyysin perusteet todistetaan:

Lause 1.7. $L_1[a,b]$ *on Banach–avaruus.*

Lause 1.8. $L_2[a,b]$ *on Hilbert–avaruus.*

5.4 Banachin kiintopistelause

Kerrataan jos $f : [0,1] \to [0,1]$ on jatkuvasti derivoituva ja $|f'(x)| < 1$ kaikilla $x \in [0,1]$, niin f:llä on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste eli $x^* \in [0,1]$ siten, että $f(x^*) = x^*$. Tämä löydetään *iteraatiolla* $x^{k+1} = f(x^k)$ lähtien mielivaltaisesta $x^0 \in [0,1]$.



Olkoon V normiavaruus, B V:n osajoukko ja F kuvaus $B \to B$. Sanotaan, että F on *kontraktio* B:ssä, jos on olemassa $\mu \in (0,1)$ siten, että

$$\|F(u) - F(v)\| \le \mu \, \|u - v\| \qquad \text{kaikilla} \qquad u, v \in B\ .$$

Lause 1.9 (Banachin kiintopistelause). *Olkoon V Banach–avaruus, $B \subset V$ suljettu ja F kontraktio B:ssä. Tällöin F:llä on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste B:ssä eli $x \in B$ siten, että $x = F(x)$.*

Tod. Olkoon $x^0 \in B$ ja $x^{k+1} = F(x^k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Näytetään, että $\{x^k\}_{k \geq 0}$ on Cauchy-jono. Kontraktioehto antaa

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^k\| &= \|F(x^k) - F(x^{k-1})\| \leq \mu \|x^k - x^{k-1}\| \\ &\leq \mu^2 \|x^{k-1} - x^{k-2}\| \leq \cdots \leq \mu^k \|x^1 - x^0\| ,\end{aligned}$$

josta

$$\begin{aligned}\|x^{k+n} - x^k\| \quad &\leq \|x^{k+n} - x^{k+n-1}\| + \|x^{k+n-1} - x^{k+n-2}\| + \ldots \\ &\quad + \|x^{k+2} - x^{k+1}\| + \|x^{k+1} - x^k\| \\ &\leq (\mu^{k+n-1} + \mu^{k+n-2} + \cdots + \mu^{k+1} + \mu^k) \|x^1 - x^0\| \\ &\leq \mu^k \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \, \|x^1 - x^0\| = \frac{\mu^k}{1-\mu} \|x^1 - x^0\| .\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan k_ε siten, että

$$\frac{\mu^{k_\varepsilon}}{1-\mu} \|x^1 - x^0\| < \varepsilon ,$$

jolloin

$$j, k \geq k_\varepsilon \implies \|x^j - x^k\| < \varepsilon .$$

Tällöin $\{x^k\}_{k \geq 0}$ on Cauchy-jono. Koska V on täydellinen, on olemassa $x \in V$ siten, että $\lim_{k \to \infty} x^k = x$. Koska B on suljettu, $x \in B$. Nyt

$$\|F(x) - F(x^k)\| \leq \mu \|x - x^k\| ,$$

joten $\lim_{k \to \infty} F(x^k) = F(x)$. Antamalla nyt $k \to \infty$ yhtälössä $x^{k+1} = F(x^k)$ saadaan $x = F(x)$. $\square$

Huomautus 1.10. On tärkeää, että $\mu \in (0, 1)$.

Seuraava lausetta voidaan käyttää sen näyttämiseen, että yhtälön ratkaisu riippuu datasta jatkuvasti (vertaa: hyvin asetettu tehtävä).

Lause 1.11. *(Lause 5.19) Olkoot F ja $\tilde{F}$ kontraktioita Banach-avaruuden osajoukossa B vakiolla $\mu \in (0,1)$, ja olkoot x ja $\tilde{x}$ näiden kiintopisteet. Tällöin, jos $\|F(x) - \tilde{F}(x)\| \leq \delta$, niin $\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{\delta}{1-\mu}$.*

Tod.

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}\| &= \|F(x) - \tilde{F}(\tilde{x})\| \leq \|F(x) - \tilde{F}(x)\| + \|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(\tilde{x})\| \\ &\leq \delta + \mu \|x - \tilde{x}\| . \end{aligned}$$

Täten

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{\delta}{1-\mu} .$$

$\square$

1.1. **Kiintopistelauseen sovelluksia.**

Todistamme aluksi Picardin lauseen.

Lause 1.12. *(Picard) Olkoon* $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *jatkuva ja* $\boldsymbol{x}$ *:n suhteen Lipschitz–jatkuva jossain* $\boldsymbol{x}_0$ *:n (avoimessa) ympäristössä* Ω*, eli*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|, \quad x,y \in \Omega.$$

Tällöin on olemassa $T > 0$ *siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) , \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n ,$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu välillä $[0,T]$.

Tod. Oletetaan aluksi, että $\Omega = \mathbb{R}^n$

Olkoon $T < 1/L$, ja $V = C([0,T], \mathbb{R}^n)$ varustettuna normilla

$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max_{t \in [0,T]} |\boldsymbol{v}(t)| .$$

V on Banach-avaruus

Asetetaan

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{v}(\tau))\, d\tau , \qquad t \in [0,T] ,$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})\|_\infty &= \max_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t [\, \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{u}(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{v}(\tau)) \,]\, d\tau \right| \\
&\le \max_{t \in [0,T]} \int_0^t |\, \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{u}(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{v}(\tau)) \,|\, d\tau \\
&\le \max_{t \in [0,T]} \int_0^t L\, |\boldsymbol{u}(\tau) - \boldsymbol{v}(\tau)|\, d\tau \le LT\, \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_\infty .
\end{aligned}$$

Nyt $\mu = LT < 1$, joten $\boldsymbol{F}$ on kontraktio V :ssä ja sillä on yksikäsitteinen kiintopiste.

Oletetaan seuraavaksi: $B_\rho(\boldsymbol{x}_0) \subset \Omega$. Meidän tulee varmistaa, että iteraatiossa

$$\boldsymbol{x}^0(t) = \boldsymbol{x}_0\,, \quad \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)$$

pätee $\boldsymbol{x}^k(t) \in B_\rho(\boldsymbol{x}_0)$ eli

$$\left|\boldsymbol{x}^k(t) - \boldsymbol{x}_0\right| \leq \rho\,, \qquad \text{kaikilla } t \in [0,T]\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Näin on, jos (Tehtävä 2)

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0) - \boldsymbol{x}^0\| \leq (1-\mu)\rho$$

eli

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_0)\, d\tau \right| \leq (1 - LT)\rho\ .$$

Jos

$$M = \max_{\tau\in[0,1/L]} |\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_0)|$$

ja valitsemme T:n siten, että

$$MT \leq (1 - LT)\rho$$

eli $T = \rho/(M + L\rho)$. tämä pätee. $\square$

Lausen 5.19 avulla voimme todistaa, että tavallisen differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävän ratkaisu riippuu jatkuvasti alkuarvosta ja oikeasta puolesta:

Lause 1.13. *(Lause 5.20) Olkoot* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{x}_0$ *ja* ρ, T, L *kuten edellisessä lauseessa ja sen todistuksessa. Tällöin kaikille* $\varepsilon > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *siten, että jos* $\tilde{\boldsymbol{f}}$ *toteuttaa Lipschitz-ehdon vakiolla* L *ja*

$$|\tilde{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0| < \delta \,, \qquad |\tilde{\boldsymbol{f}}(t,\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{v})| < \delta \,, \quad t \in [0,T] \,, |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}_0| \le \rho \,,$$

niin yhtälöiden

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) \,, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \,, \qquad \tilde{\boldsymbol{x}}'(t) = \tilde{\boldsymbol{f}}(t, \tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \,, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \,,$$

ratkaisut toteuttavat $|\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon$ *kaikilla* $t \in [0,T]$.

Todistus: HT.

Esimerkki 5.21: Epälineaarista reuna-arvotehtävä. Olkoon g tehtävän

$$\begin{cases} -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) = h(x) \,, & x \in [0,1] \,, \\ u(0) = 0 \,,\ u(1) = 0 \,. \end{cases}$$

Greenin funktio (oletetaan että se on olemassas), niin tehtävän

$$\begin{cases} -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) = f(x, u(x)) \,, & x \in [0,1]] \,, \\ u(0) = 0 \,,\ u(1) = 0 \,. \end{cases}$$

ratkaisu (mikäli se on olemassa) toteuttaa integraaliyhtälön

$$u(x) = \int_0^1 g(x,s)\, f(s, u(s))\, ds \,. \tag{1.8}$$

Näytämme, että jos f on jatkuva ja sillä on riittävän pieni Lipschitz-vakio u :n suhteen, niin yhtälöllä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu.

Oletetaan siis että

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq L\,|u-v| \qquad \text{kaikilla} \qquad u,v \in \mathbb{R}\,,\; x \in [0,1]\,.$$

Asetetaan $V = C[0,1]$ ja $F : V \to V$

$$F(v)(x) = \int_0^1 g(x,s)\, f(s,v(s))\, ds\ ,$$

jolloin (1.8):n ratkaisu on F:n kiintopiste. Olkoon

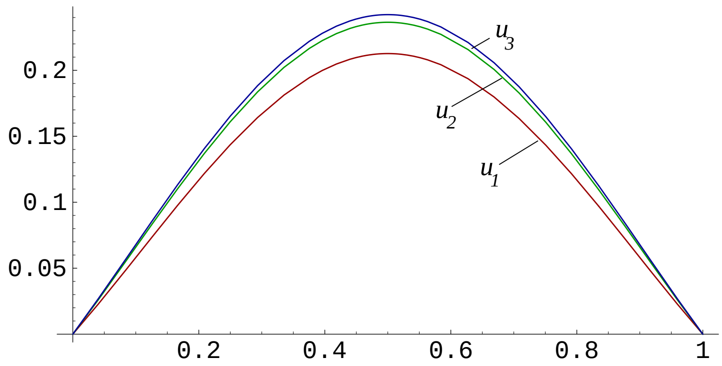
$$M = \max_{x,s\in[0,1]} |g(x,s)|$$

(äärellinen sillä g on jatkuva). Tällöin

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_\infty &= \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 g(x,s)\,[\, f(s,u(s)) - f(s,v(s))\,]\, ds \right| \\
&\leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |g(x,s)|\ |\, f(s,u(s)) - f(s,v(s))\,|\ ds \\
&\leq \int_0^1 M\,L\ |\, u(s) - v(s)\,|\ ds \leq ML\,\|u-v\|_\infty\ .
\end{aligned}$$

Täten, jos $L < 1/M$, niin F on kontraktio ja sillä on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste.

Reuna-arvotehtävän voidaan nyt löytää iteroimalla $u_{k+1} = F(u_k)$ lähtien mielivaltaisesta alkufunktiosta u_0 .



KUVA 1. Iteraatio tehtävälle (1.9)

Esimerkille 2.12

$$\begin{cases} u''(x) + \omega^2 u(x) = h(x) \ , \\ u(0) = 0 \, , \ u(1) = 0 \ . \end{cases}$$

saatiin Greenin funktioksi

$$g(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{\omega \, \sin(\omega)} \sin(\omega s) \sin(\omega x - \omega) \ , & \text{kun} \ \ 0 \le s \le x \le 1 \\ \frac{1}{\omega \, \sin(\omega)} \sin(\omega x) \sin(\omega s - \omega) \ , & \text{kun} \ \ 0 \le x \le s \le 1 \ . \end{cases}$$

Olkoon nyt tehtävänä ratkaista

$$\begin{cases} u''(x) + 16 \, u(x) = 1 + 4 \, u(x)^2 \ , \\ u(0) = 0 \, , \ u(1) = 0 \ . \end{cases} \tag{1.9}$$

JIteraation $u_{k+1} = F(u_k)$ pitäisi toimia (ellei $\|u_k\|_\infty$ kasva liian suureksi). Nyt se tarkoittaa

$$u_{k+1}(x) = \int_0^1 g(x,s) \, (1 + 4 \, u_k(s)^2) \, ds \ ,$$

missä g on kuten yllä ($\omega = 4$). Numeerisesti integroimalla alkuarvosta $u_0(x) = 0$ saadaan kuva, jossa u_3 on jo viivan tarkkuudella ratkaisu.